Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 9 –

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Etudier la limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+5h) - f(x_0-2h)}{h}.$$

Exercice 2 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $I =]-a,a[$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp.paire).

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application T-périodique ($T > 0$), et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est aussi T-périodique.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$; il existe une fonction polynômiale P_n telle que: $\forall x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)^n}$.
2. Donner l'expression de P_{n+1} en fonction P_n' et P_n, puis en fonction de P_n et P_{n-1}.
3. Calculer le coefficient constant de P_n.

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et dérivable sur $[0,a]$ et telle que $f(0) = 0$ et $f'(a)f(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6 Soit $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en 0 et telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + f'(x)\right) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
(ind: Considérer $g : x \longmapsto e^x \left(f(x) - l\right)$, utiliser les hypothèses et le TAF).

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(\frac{x}{2}+3) = \dfrac{f(x)}{2} + 3$.
2. En déduire que f' est constante et déterminer f.

Exercice 9 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $c \in]a,b[$.

1. On suppose $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que:
$$f(c) = \frac{f''(d)}{2}(c-a)(c-b).$$
(indication: considérer la fonction $x \longmapsto f(x) - A(x-a)(x-b)$, Abien choisi)
2. On revient au cas général. Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que:
$$f(c) = \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) + \frac{f''(d)}{2}(c-a)(c-b).$$
3. Ecrire la formule avec $c = \dfrac{a+b}{2}$. Commenter.

Exercice 10 Quelles sont les fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe bijective. Etudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ alors f présente un minimum global en x_0.

Exercice 14 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment contenu dans I. Donner un exemple où f n'est pas lipschitzienne sur I tout entier.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - lx)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.