

**Exercice 1** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis,  $f : E \rightarrow F$  et soit  $p \in \mathbb{N}^*$  tels que :  $\text{Card}(f^{-1}(\{b\})) = p$  pour tout  $b \in F$ .  
Montrer que  $\text{Card}(E) = p \cdot \text{Card}(F)$ .

**Exercice 2** Pour  $A, B$  deux ensembles de  $E$  on note  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .  
Pour  $E$  un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card} A \Delta B = \text{Card} A + \text{Card} B - 2 \text{Card} A \cap B.$$

**Exercice 3** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  ?

**Exercice 4** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer :

1. Les partitions de  $E$  en deux parties.
2. Les couples  $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $X \cup Y = E$ .

**Exercice 5** Soit  $n$  un entier naturel non nul, combien y'a-t-il de surjections de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

**Exercice 6** Soit  $E$  un ensemble non vide, montrer qu'il n'existe pas d'application surjective de  $E$  vers  $\mathcal{P}(E)$ .  
(*indication* : considérer la partie  $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$ ,  $f$  une éventuelle surjection.)

**Exercice 7** Soient  $E$  un ensemble non vide et  $X, Y$  une partition de  $E$ .

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto (A \cap X, A \cap Y) \end{aligned}$$

2. Montrer que pour  $p, q, r \in \mathbb{N}$  tel que  $r \leq p + q$  on a :

$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

**Exercice 8** Soit  $E$  un ensemble,  $a \in E$  et  $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une bijection.
2. On suppose désormais que  $E$  est fini et  $\text{Card}(E) = n$ . On pose  $\mathcal{P}_0(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal pair et  $\mathcal{P}_1(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal impair.  
Montrer que  $\text{Card}(\mathcal{P}_0(E)) = \text{Card}(\mathcal{P}_1(E))$ .
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$ .

**Exercice 9 (Combinaisons avec répétition)** Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer le nombre des applications  $u : E \rightarrow \llbracket 0, p \rrbracket$  telles que  $\sum_{x \in E} u(x) \leq p$ .  
(*indication* : supposer  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  et considérer l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n+p \rrbracket$ )
2. En déduire le nombre  $\mathcal{K}_n^p$  des applications  $v : E \rightarrow \llbracket 0, p \rrbracket$  telles que  $\sum_{x \in E} v(x) = p$ .

**Exercice 10 (Dérangements)** Soit  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle *dérangement* de  $E$  toute bijection  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que :  $\forall x \in E : f(x) \neq x$ .

1. Pour  $i \in E$ , quel est le nombre de bijections laissant  $i$  invariant ?
2. Quel est le nombre de bijections laissant aux moins un élément de  $E$  invariant ?
3. En déduire le nombre de dérangements de  $E$ .
4. Quel est le nombre de façons de mettre  $n$  lettres dans  $n$  enveloppes de sorte que :
  - (a) Au moins une lettre arrive à son destinataire ?
  - (b) Aucune lettre n'arrive ?