

### Calculs de développements limités

**Exercice 1** Donner le développement limité en 0 des fonctions :

- $x \mapsto \ln(\cos(x))$  (à l'ordre 6).
- $x \mapsto \tan(x)$  (à l'ordre 7).
- $x \mapsto \sin(\tan(x))$  (à l'ordre 7).
- $x \mapsto (\ln(1+x))^2$  (à l'ordre 4).
- $x \mapsto \exp(\sin(x))$  (à l'ordre 3).

**Exercice 2** Faire un développement limité ou asymptotique en  $a$  à l'ordre  $n$  :

- $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ ,  $n = 2$ ,  $a = 0$ .
- $\ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $n = 3$ ,  $a = 0$ .
- $\ln \sin x$ ,  $n = 3$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ .
- $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$ ,  $n = 4$ ,  $a = +\infty$ .
- $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ,  $n = 3$ ,  $a = 0$ .
- $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$ ,  $n = 2$ ,  $a = +\infty$ .

**Exercice 3** Développements limités en 0 de :

- $\cos x \cdot \ln(1+x)$  à l'ordre 4.
- $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4.
- $\arcsin(\ln(1+x^2))$  à l'ordre 6.
- $\frac{\sinh x - x}{x^3}$  à l'ordre 4.
- $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  à l'ordre 3.

### Applications des développements limités

**Exercice 4** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}.$$

**Exercice 5** Étudier la position du graphe de l'application  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$  par rapport à sa tangente en 0 et 1.

**Exercice 6** Soit  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$ .

- Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
- Déterminer un DL de  $f$  en 0 à l'ordre 2.
- Étudier la dérivabilité du prolongement de  $f$ .

**Exercice 7** Étudier les branches infinies des fonctions :

- $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ .
- $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$ .

**Exercice 8** Calculer :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent de  $\ell - \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{x \ln x}$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 9** Soit  $g$  la fonction  $x \mapsto \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$ .

- Donner le domaine de définition de  $g$ .
- Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
- Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.