Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ repère cartésien.

Exercice 1 Soit A, B et C trois points non alignés de E et α, β, γ des réels tels que les barycentres G, G_1, G_2 et G_3 de $((A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma))$, $((A,-\alpha), (B,\beta), (C,\gamma))$, $((A,\alpha), (B,-\beta), (C,\gamma))$, $((A,\alpha), (B,\beta), (C,-\gamma))$ existent.

1. Montrer que les droites (AG_1), (BG_2) et (CG_3) concourent en G.
2. Montrer que les droites (G_2G_3), (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C.

Exercice 2 Soit f une application affine de E dans lui-même et (A, B) un couple de points distincts de E. Montrer que si A et B sont des points fixes de f alors la droite (AB) est invariante par f.

Exercice 3 Déterminer toutes les applications affines f de E, commutant avec toutes les translations.

Exercice 4 Donner l'expression analytique de la projection sur $P : x + y + z = 1$ parallèlement à $D = Vect\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$.

Exercice 5 Même question, avec la symétrie par rapport à $Q : x + z = 1$ selon $\Delta = Vect\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$.

Exercice 6 Soit (A, B, C) un triangle de E, a, b et c des réels. On désigne par f l'application de E dans lui même qui, à tout point M associe le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c); (M, 1 - a - b - c)\}$. Montrer que f est une translation ou une homothétie.

Exercice 7 Soit f un endomorphisme affine de E tel que pour tout point M de E, $f^2(M)$ soit le milieu du segment $[M, f(M)]$. Montrer que f est une affinité.

Exercice 8 Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux ensembles convexes. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des milieux des segments $[M_1, M_2]$ $(M_i \in \mathcal{C}_i, i = 1, 2)$. Montrer que $\mathcal{M}$ est convexe.

Exercice 9 Soit f une application affine de E telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = Id_E$. Montrer que f admet un point invariant.

Exercice 10 Soit f un endomorphisme affine de E tel que f^2 ne soit pas constant et f^3 constant.

1. Montrer que f admet un unique point fixe Ω.
2. Déterminer $f^{-1}\{\Omega\}$ et $(f^2)^{-1}\{\Omega\}$.

Dans toute la suite on suppose E euclidien et que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormal direct.

Exercice 11 Etant deux réels a et b, on considère les 4 plans d'équations:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P} : x - y - a = 0 & \mathcal{P}' : x + 2y + z - 2b = 0 \\ \mathcal{Q} : y + 3z + 1 = 0 & \mathcal{Q}' : 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array}$$

puis les deux droites: $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'$.

1. Déterminer a et b pour que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ aient une intersection non vide et donner une équation du plan les contenant alors.
2. La condition précédente étant réalisée, montrer que, lorsque a varie, la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ reste dans un plan fixe.

Exercice 12 Déterminer géométriquement l'application f dans chacun des cas suivants:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -z + 1 \\ y = x \\ z' = y - 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = z + 1 \\ y = x \\ z' = y - 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = -z + 1 \\ y = -x \\ z' = y - 2 \end{array}\right.$$

Exercice 13 Déterminer la droite symétrique de (Oz) par rapport au plan d'équation : $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Exercice 14 Soient A, B et C trois points non alignés et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que:

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = k$$