

Dans toute la suite  $\mathbf{E}_3$  désigne l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

**Exercice 1** Soient  $(a, b) \in \mathbf{E}_3, a \neq 0$ .

1. Donner une CNS pour que l'équation:

$$x \in \mathbf{E}_3 : a \wedge x = b \quad (1)$$

possède au moins une solution.

2. Résoudre dans ce cas l'équation (1).
3. Résoudre l'équation:

$$x \in \mathbf{E}_3 : x + a \wedge x = b$$

**Exercice 2** Pour tout  $v \in \mathbf{E}_3$ , on note  $f_v : \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbf{E}_3, x \longmapsto v \wedge x$ .

1. Soit  $v \in \mathbf{E}_3$ , on note  $(p, q, r)$  ses coordonnées dans une b.o.n.d  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{E}_3$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall x, y \in \mathbf{E}_3 : (f_v(x) \mid y) = -(x \mid f_v(y))$ .
  - (b) Déterminer  $\ker(f_v)$  et  $\text{Im}(f_v)$ .
  - (c) Déterminer la matrice de  $f_v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , remarquer qu'elle est antisymétrique.
2. Réciproquement soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_3)$ , vérifiant 1.(a).  
Montrer qu'il existe un unique vecteur  $v \in \mathbf{E}_3$ , tel que  $f = f_v$ .

**Exercice 3** On considère deux rotations  $f$  et  $g$  de  $\mathbf{E}_3$ , qui *commutent* et qui ne sont ni  $Id_{\mathbf{E}_3}$  ni des demi-tours.  
Que peut-on dire de  $f$  et  $g$ ?

**Exercice 4** Etudier dans chacun des deux cas suivants l'endomorphisme de  $\mathbf{E}_3$ , donné par sa matrice  $A$  dans la base canonique:

$$1) A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2) A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5** Soit  $u \in \mathcal{O}^-(\mathbf{E}_3)$ . On pose  $F = \ker(u + id)$ .

1. Montrer que  $F \neq \{0\}$  et que  $F$  et  $F^\perp$  sont stables par  $u$ . Pour quelle raison  $\dim(F) \neq 2$ ?
2. On suppose  $\mathbf{E}_3 \neq F$ . Montrer que la restriction de  $u$  à  $F^\perp$  est une rotation.
3. En déduire qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et une base  $\varepsilon$  de  $\mathbf{E}_3$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6** Soit  $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : |a_{i,j}| \leq 1 \quad \text{et que} \quad \left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n.$$

**Exercice 7** Soit  $E$  euclidien,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in E^{2n}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j).$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal  $f$  de  $E$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i.$$

**Exercice 8** Pour tout  $f \in L(E)$ , on note  $f^*$  l'application définie par

$$\forall x, y \in E : (f(x) \mid y) = (x \mid f^*(y)).$$

1. Justifier la définition de  $f^*$  et montrer que  $f^*$  est linéaire.
2. Montrer que :  $f \in O(E) \iff ff^* = Id_E$ .