Exercice 1 Calculer les déterminants d'ordre n suivants:

$$1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} ;\ 2)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & a+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & a+n \end{vmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* .$$

3) $\det\left((ia+jb)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^t\, ComA$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de B.
2. Déterminer le rang de B suivant celui de A.

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1,...,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1,$$
$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, a_{i,j} \in [0,1[.$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$.

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) + 2 \leqslant n$. Montrer que:

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 4 Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. Montrer que la famille

$$((X-x_0)^n, (X-x_1)^n, ..., (X-x_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, telle que $f^2 = -Id_E$.
Montrer que n est pair.

Exercice 6 Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}$, tel que $a_1 \neq a_2$, et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^4$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, unique tel que:

$$\begin{cases} \deg(P) \leqslant 3, \\ P(a_1) = \lambda_1, P(a_2) = \lambda_2, \\ P'(a_1) = \mu_1, P'(a_2) = \mu_2. \end{cases}$$

Généraliser.

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$.

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts. Montrer que $\left(P(X+a_j)\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. En déduire la valeur de $\det\left((P(z+j+k))_{0\leqslant j,k\leqslant n+1}\right)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Pour chaque $i \in \{0, \ldots, n\}$, on note α_i l'application

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_i) \end{array}$$

1. Vérifier que chaque α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. On note G l'espace engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Déterminer G°. En déduire que la famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Montrer que la famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$
5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   En déduire que pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré n, qui interpole f en chaque point x_i, c'est à dire qui satisfait :
$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad P(x_i) = f(x_i).$$