Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 2 –

Exercice 1 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$.
Montrer que : $a = b = c = d$.

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = n$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $x_i = 1$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de réels : $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)$$

Exercice 4 Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

1. $a + b < 2 + a^2 + b^2$.
2. $a + b < (1 + a^2)(1 + b^2)$.

Exercice 5 Soient $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$, $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\min \left\{ \frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; ...; \frac{a_n}{b_n} \right\} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leqslant \max \left\{ \frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; ...; \frac{a_n}{b_n} \right\}.$$

Exercice 6 Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right) \geqslant n^2.$$

Exercice 7 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_+ : (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note:

$$A + B = \{x = a + b \mid (a, b) \in A \times B\} \text{ et } AB = \{x = ab \mid (a, b) \in A \times B\}$$

1. Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. Si de plus A et B sont inclus dans $\mathbb{R}_+$, montrer que : $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Exercice 9 Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$.
Montrer que : $\sup\limits_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 10 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (a, b) \in A \times B : a \leqslant b$.
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$

Exercice 11 Détérminer les bornes sup et inf de la partie $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.