

Exercice 1 Dans \mathbb{R}^4 Euclidien canonique, on considère le plan H d'équation cartésienne relativement à la base canonique:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ecrire, dans la base canonique, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à H .

Exercice 2 Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque.

Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 3 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.

Exercice 4 Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée; $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité : $\|\sum_{i=1}^n v_i\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$, pour tout $v_1, \dots, v_n \in E$.

Exercice 5 Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice 6 Sur $M_n(\mathbb{R})$, on considère l'application : $(A, B) \rightarrow \text{tr}({}^tAB)$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.
2. Soit N la norme associée, montrer que :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3. Montrer que : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A)$.
4. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques pour ce produit scalaire.

Exercice 7 Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 8 Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\forall x, y \in E$ tels que $\langle x, y \rangle = 0$, on ait $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E : \|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice 9 L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 étant muni de sa structure euclidienne canonique. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $(p, q) \in E^2$, on pose

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(-1)q(-1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Trouver une base orthogonale de E , (P_0, P_1, P_2) telle que $\deg(P_i) = i$, pour $i = 0, 1$ et 2 .

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour tout $(p, q) \in E^2$, on pose

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)e^{-x}dx.$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Calculer : $\lambda = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax + b)^2 e^{-x} dx$.