

Exercice 1 On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice $N = A^2 - 8A + 12I_3$.
2. Endéduire la matrice A^{-1} .
3. Résoudre le système linéaire:

$$\begin{cases} 8x + 3y - 3z = -1 \\ -2x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -3e_2 + 3e_3 & e_1 &= (1, 0, 0) \\ f(e_2) &= -4e_1 - 4e_2 + 4e_3 & e_2 &= (0, 1, 0) \\ f(e_3) &= 2e_1 - e_2 + e_3 & e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad \text{avec}$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base \mathcal{B} .
2. Déterminer $\ker f$, et $\text{Im } f$.
3. On pose $u_1 = (-2, 1, 2)$, $u_2 = (-1, -1, 1)$ et $u_3 = (-2, 1, -1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Trouver les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n) .
- (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

Exercice 4 Soit le système d'équations de récurrence linéaires:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ On pose } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

1. Mettre le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = MX_n$.
2. On pose $N = M - I_3$, calculer N^2, N^3 et N^n et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer X_n en fonction de X_0 .

Exercice 5 Soit $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[X]$, et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On considère l'application:

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}; P \longmapsto (1 - X)^2 P(0) + 2X(1 - X)P\left(\frac{1}{2}\right) + X^2 P(1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1 - X^2, X(1 - X), X^2)$ est une base de \mathbf{E} et déterminer les matrices de passage: $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et P^{-1} .
2. Montrer que f est linéaire et déterminer les matrices: $M_{\mathcal{B}}(f), M_{\mathcal{B}'}(f), M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$.

Exercice 6 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible. (Théorème d'Hadarnard).

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire à éléments diagonaux nuls. Montrer que $A^n = 0$.

Exercice 8 Calculer les inverses des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0 .
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Donner les termes généraux x_n et y_n .

Exercice 10 Etudier le rang des matrices:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le rang de

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, x + m^2z)$$

où m est un paramètre réel.

1. Ecrire la matrice A de f relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2. Pour quelle valeur de m , f est elle bijective?
3. Discuter selon m , le rang de A et donc de f .

Exercice 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D .
2. Trouver toutes les matrices B telles que $B^2 = A$.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 Etudier selon les paramètres $m, a, b \in \mathbb{R}$, les systèmes:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ -x + my + z = m \\ x + 2y + mz = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x + 2y - z + t = a \\ 2x + y - z = a - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2a \\ (a + 2)x + (a + 2)y - z = 3a + b \\ 3x - z + 3t = -a^2 \end{cases}.$$