Divers

1. Calculer les intégrales: $\int_{-1}^{2} x\,|x|\,dx$ et $\int_{-1}^{1} x\,|x|\,dx$.
2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$.
   Utiliser la commande Maple: > sum(((b-a)/n)*f(a+(k*(b-a)/n)), k=1..n);
   pour différentes valeurs de n puis comparer avec la valeur exacte $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Etudier les suites:
   (a) $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{n\pi}{n}\right]$.
   (b) $u_n = n\left[\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \ldots \dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.
   (c) $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
4. Trouver les primitives des fonctions suivantes:
   1. $(x-1)\sqrt{x}$. 2. $\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$. 3. x^3e^{2x}. 4. $x^2\ln x$. 5. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
5. Etudier la fonction $f : x \longmapsto \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Primitives usuelles

1. $\int e^{2x}\sin 3x dx$. 2. $\int \sqrt{1-\cos x}dx$. 3. $\int \ln^2 x dx$. 4. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Fractions rationnelles

En utilisant la décomposition en élments simples (voir chapitre *polynômes et fractions rationnelles*), on se ramène à des intégrales de la forme $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$ ou $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ avec $p^2-4q<0$.

- Pour $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$, on a $\int \dfrac{dx}{(x-a)} = \ln(x-a)$
  et $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n} = \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$, si $n \geqslant 2$.
- Pour $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$, on remarque que $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx \text{ (qui est une primitive usuelle)}$$

$$+\beta\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

  pour laquelle on utilise le changement de variable $t = \dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ pour se ramener au calcul de

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

Question: Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

1. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$. 2. $\int \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}dx$. 3. $\int \dfrac{x}{(x^2-4)^2}dx$.
4. $\int \dfrac{x^4}{x^3-1}dx$.

Fonctions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

Changement de variable: $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a donc $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ et les formules:
$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exemples: 1. $\int \sin^3\cos^4 x dx$. 2. $\int \dfrac{1}{\cos x\sin^3 x}dx$. 3. $\int \dfrac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.
4. $\int \dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}dx$.

Fonctions rationnelles en e^x

Changement de variable: $t = th\dfrac{x}{2}$ ou $t = e^x$, on a donc $dx = \dfrac{2}{1-t^2}dt$ et les formules: $shx = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $chx = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $thx = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exemples: 1. $\int \dfrac{chx-1}{chx+1}e^x dx$. 2. $\int \dfrac{1}{chx(1+shx)}dx$. 3. $\int \dfrac{dx}{1+thx}$.
4. $\int \dfrac{shx}{1+th^2x}dx$.

Fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Changement de variable: $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, et on se ramène à une fraction rationnelle en t.

Exemples: 1. $\int \frac{1}{x\sqrt{2-x}}dx$. 2. $\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx$. 3. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.
4. $\int x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}dx$.

Fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tq $b^2-4ac\neq 0$

- Si $\Delta=b^2-4ac>0$ le polynôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2, on se ramène à une intégrale de la forme précédente, ou bien on distingue les deux cas:

  + $a>0$. On écrit $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, puis le changement de variable

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}ch(t) \text{ avec } t\geqslant 0.$$

  + $a<0$. On écrit $ax^2+bx+c=-a\left[\frac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$, puis le changement de variable

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\sin(t) \text{ avec } t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

- Si $\Delta<0$, alors $a>0$, on écrit $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$, puis le changement de variable

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}sh(t)$$

Exemples: 1. $\int\sqrt{2-2x+x^2}dx$. 2. $\int\frac{1}{x-2+\sqrt{2-2x+x^2}}dx$.
3. $\int\frac{x^2}{(x-1)\sqrt{2-3x+x^2}}dx$.

Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de définition
x^n , $n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\alpha\in\mathbb{R},\alpha\neq-1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*\cup\mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x-x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$artranx$	$\mathbb{R}$
$1+tan^2x$	$tanx$	$\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$1+cotan^2x$	$-cotanx$	$\mathbb{R}\diagdown\pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx$	$]-1,1[$
shx	chx	$\mathbb{R}$
chx	shx	$\mathbb{R}$
$1-th^2x$	thx	$\mathbb{R}$
$coth^2x-1$	$-cothx$	$\mathbb{R}^*$
thx	$\ln(chx)$	$\mathbb{R}$
$cothx$	$\ln\lvert shx\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$argsh(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert=argch(x),x\geqslant1$	$\mathbb{R}\diagdown[-1,1]$