Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Soit une famille de polynômes $(P_0, P_1, ..., P_n)$,$n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout i $\deg(P_i) = i$. Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et on considère $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. Montrer que la famille $(P, P', ..., P^{(n)})$ est libre. Pourquoi $\mathbb{R}$?

Exercice 2 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unique tel que:
$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$
2. Donner une relation entre P'_n et P_{n-1}, pour tout n.
3. Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n$, et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n$.

Exercice 3 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 4 Montrer que les polynômes
$$A = X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ et } B = X^2 + X + 1$$
sont premiers entre eux et déterminer tous les couples (U, V) de polynômes tels que: $UA + VB = 1$.

Exercice 5 On considère le polynôme:
$$P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108.$$
Calculer le *pgcd* de P et P' et en déduire une factorisation de P.

Exercice 6 Montrer que pour tout polynôme P, $P - X$ divise $P \circ P - X$.
Application: Résoudre l'équation: $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Exercice 7 On note $\mathbf{E} = \mathbb{R}_n[X]$:$\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degrés $\leqslant n \neq 0$.
Soit $\Delta : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}, P \longmapsto \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.
2. Déterminer image et noyau de Δ.
3. Etablir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Exercice 8 Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions suivantes:

$$a)\frac{1}{(X^2+1)^2(X-1)^2} \qquad b)\frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2},$$
$$c)\frac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)} \qquad d)\frac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}.$$

Réponse $\frac{1}{(X^2+1)^2(X-1)^2} = \frac{1}{4(X-1)^2} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{4}\frac{1+2X}{X^2+1} + \frac{1}{2}\frac{X}{\left(X^2+1\right)^2}$

$\frac{1}{(X^2+1)^2-X^2} = -\frac{1}{2}\frac{X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2}\frac{X+1}{X^2+X+1}$
$\frac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)} = \frac{1}{(X-1)^4} - \frac{1}{2(X-1)^3} - \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{5}{8(X-1)} + \frac{1}{24(X+1)} - \frac{1}{3}\frac{-1+2X}{X^2-X+1}$
$\frac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{(X+1)^3} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1} - \frac{X+2}{X^2+X+1} - \frac{1}{\left(X^2+X+1\right)^2}$

Exercice 9 Quelques applications de la décomposition en éléments simples:

1. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction rationnelle:
$$x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)...(x+n)}.$$
2. Calculer la limite de la suite $(S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} u_k)_{n \geqslant 3}$, avec
$$u_k = \frac{4k-1}{k(k-2)(k+1)}.$$
3. Même question que 2) avec $u_k = \dfrac{k}{1+k^2+k^4}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
4. Soit P un polynôme à coefficients complexes, admettant n racines distinctes.
Montrer que toute racine de P' est barycentre avec coefficients positifs des racines de P. (utiliser la fraction $\frac{P'}{P}$).
5. Calcul intégral (voir TD sur le calcul intégral).