Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ et $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbf{E} = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 Déterminer lesquels des ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = x + y + z = 0\}$.
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 3 Soit $\mathbf{E} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $F = \{f \in \mathbf{E} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{E}$.

Exercice 4 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs: $u = (x, 1, 0,); v = (0, 0, 1)$ et $w = (1, y, 1)$, x et y étant deux paramètres réels.
Etudier selon x et y la dépendance et l'indépendance de la famille (u, v, w) et donner dans chaque cas une base du sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{u, v, w\}$.

Exercice 5 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les trois fonctions

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \sin 2x, \quad x \mapsto \sin 3x,$$

sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.

Exercice 6 Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-ev, on pose $e = (1, 1, ..., 1)$ et

$$H = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\}.$$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}.e \oplus H$.

Exercice 8 Soit $\mathbf{E}$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer l'application $\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(1)$ est une forme linéaire surjective.
   On pose $H = \ker(\varphi)$.
2. Détérminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et montrer que leur ensemble est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$, on le notera D.
3. Montrer que $\mathbf{E} = H \oplus D$.

Exercice 9 $\mathbf{E} = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\right\}$. On pose

$$E_1 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} + x_n = 0\right\}, \text{ et}$$
$$E_2 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\right\}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}$ est un $\mathbb{R}$-ev et que E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbf{E}$
2. Montrer que $\mathbf{E} = E_1 \oplus E_2$.
3. Donner une base E_1 une base de E_2 et en déduire une base de $\mathbf{E}$.

Exercice 10 Soit p un projecteur de $\mathbf{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$.
Montrer que $Id_\mathbf{E} - \lambda p \in GL(\mathbf{E})$.

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, montrer que

1. $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_\mathbf{E}\}$.
2. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) + \ker(f) = \mathbf{E}$.

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ telle que $f^2 - 5f + 6Id_\mathbf{E} = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Montrer que

$$\mathbf{E} = \ker(f - 2Id_\mathbf{E}) \oplus \ker(f - 3Id_\mathbf{E}).$$