Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 11 –

Exercice 1 Soit (u_n) une suite de nombres réels .

1. On suppose $\lim u_n = +\infty$, montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément .
2. On suppose (u_n) convergente , montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément ou un plus grand élément .

Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle non majorée; montrer qu'elle admet une sous suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 3 Soit (u_n) une suite réelle telle que les trois sous suite (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
Est ce qu'on a la même conclusion si on suppose seulement la convergence des deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})?

Exercice 4 Etant donné un réel x , on pose : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$, $n \geqslant 1$.
Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite bornée telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$:$2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$.
Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Exercice 6 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs .

1. On suppose que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, montrer que :
   (a) $\ell < 1 \Longrightarrow \lim u_n = 0$.
   (b) $\ell > 1 \Longrightarrow \lim u_n = +\infty$.
2. Mêmes questions que 1. avec $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
3. Donner des exemples du cas $\ell = 1$.
4. Montrer que si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$, et que la réciproque est fausse .
   application : $\lim \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)...(n+n)}$?

Exercice 7 Soit une suite (u_n) de nombres réels telle que $\lim[n(u_{n+1} - u_n)] = 1$.
Montrer que $\lim u_n = +\infty$.
A- t-on la même conclusion si $\lim[n(n+1)(u_{n+1} - u_n)] = 1$?

Exercice 8 Soit une suite réelle (u_n). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n},$$

on dit que (v_n) est la moyenne de *Cesaro* de (u_n).

1. On suppose dans cette question que $u_n > 0$, pour tout n. Et on pose
$$w_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_1} + ... + \frac{1}{u_n}\right).$$
   On suppose que $\lim v_n = v$ et $\lim w_n = w$. Montrer que $vw \geqslant 1$.
2. On suppose que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim v_n = \ell$.
3. On suppose que $(u_{n+1} - u_n) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \longrightarrow \ell$.

Exercice 9 Etudier la suite (u_n) définie par une relation de recurrence, dans chacun des cas suivants:

1. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{cases}$

Exercice 10 On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par:

$$\begin{cases} tg(u_n) = u_n \\ u_n \in \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}, \quad \text{et } v_n = u_n - n\pi, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (v_n) est convergente et donner sa limite.
2. Donner un équivalent de la forme $\left(\dfrac{k}{n}\right)$ de $\left(v_n - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. étudier (u_n) selon la valeur de u_0 et, en utilisant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, en donner un équivalent dans le cas $u_0 \in]-1;0]$.

Exercice 12 Étudier la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ u_{n+1} = \sin u_n. \end{cases}$$

Donner $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$, en déduire un équivalent de $\dfrac{1}{u_n^2}$ donc de u_n.