Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 1 –

Dans toute la suite **E**, **F**... désignent des ensembles non vides.

Exercice 1 Soient A ,B et C *des* parties de **E**; montrer que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Exercice 2 Soient A, B et C trois parties de **E** telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 3 On considère les quatre assertions suivantes:

(i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0$. (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y > 0$. (iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x$.

1. Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses?
2. Donner leurs négations.

Exercice 4 Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \mid x \leqslant n$.
2. $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leqslant M$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N : |u_n| < \varepsilon$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Exercice 5 On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de **E** dans **E**.

1. Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un monoïde (unitaire).
2. Quels sont les éléments symétrisables? Simplifiables à gauche (resp à droite)?

Exercice 6 Soient $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$, $g : \mathbf{E} \to \mathbf{G}$ deux applications. On considère l'application

$$h : \mathbf{E} \to \mathbf{F} \times \mathbf{G}, \quad x \to (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives; h est elle surjective?

Exercice 7 Soient $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$, $g : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ deux applications. Montrer les implications suivantes:

1. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ injective et f surjective $\Longrightarrow g$ injective.
3. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Longrightarrow f$ surjective.