

**Exercice 1** Résoudre les équations différentielles suivantes:

- (a)  $(1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = 0.$
- (b)  $2x(1 - x)y'(x) + (1 - x)y(x) = 1.$
- (c)  $x \ln(x)y'(x) - y = -\frac{1}{x}(\ln(x) + 1).$
- (d)  $2xy'(x) + y(x) = x^n, n \in \mathbb{N}.$

**Exercice 2** Pour chacune des équations différentielles qui suit, écrire la solution passant par le point  $M(.,.)$  et tracer sommairement le graphe de la solution:

- (1)  $y' + 2xy = 0, \quad M(0, 1).$
- (2)  $y' + y \tan x = \sin x \cos x, \quad M\left(\frac{\pi}{4}, 0\right).$

**Exercice 3** Résoudre et raccorder éventuellement les équations différentielles sur  $I = \mathbb{R}$ :

- (1)  $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2.$
- (2)  $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1.$
- (3)  $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x.$

**Exercice 4** Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2 y' + y = 1.$$

**Exercice 5** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrer qu'il existe au plus une application  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)g(t)dt. \quad (1)$$

- Résoudre l'équation (1), d'inconnue  $g$ , dans le cas où  $f(x) = \cos(x)$ .

**Exercice 6** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 5y(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 7** Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , telles que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0.$$

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$

**Exercice 8** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

- (1)  $y'' - y = x^3 + x^2,$
- (2)  $y'' - 2y' + y = e^x,$
- (3)  $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$  où  $m \in \mathbb{R},$
- (4)  $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2 \cos x + (x^3 + 3)$  (utiliser le principe de superposition).

**Exercice 9** Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de  $k$  et  $m$ .

**Exercice 10** Trouver les  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables telles que  $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + f(-x) = x.$

**Exercice 11** Résoudre en posant  $z(t) = y(e^t)$  ou  $y(-e^t)$  suivant le signe de  $x$ , les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

- (1)  $x^2 y'' - 2y = x.$
- (2)  $x^2 y'' + x y' + y = x \ln |x|.$

**Exercice 12** Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli

$$x^2 y^2 - x y' - 3y = 0$$

en supposant que  $y$  ne s'annule pas et en posant  $z = \frac{1}{y}.$

**Exercice 13** Résoudre l'équation à variables séparables suivante:

$$x^2 y' - y^2 = 1$$

et déterminer la solution qui vérifie la condition  $y\left(\frac{4}{\pi}\right) = -1.$

## Devoir Libre n°: 7

à rendre le 26 Janvier

**Exercice 14** On note  $(\mathcal{L})$  l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :  $(\mathcal{L}) : y'' + q(x)y = 0$  où  $q(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2+x^4}$ .

1. Montrer que toute solution  $f$  de  $(\mathcal{L})$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $f$  est solution de  $(\mathcal{L})$ , montrer que la fonction  $g : x \mapsto f(-x)$  est aussi solution de  $(\mathcal{L})$ .
3. Soit  $f$  est solution de  $(\mathcal{L})$ , on considère les équations différentielles

$$(\mathcal{F}) : y'' + y = (1 - q(x))f(x) \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}_0) : y'' + y = 0.$$

Donner les solutions réelles de l'équation homogène  $(\mathcal{F}_0)$  puis celles de  $(\mathcal{F})$ .

4. Soient  $h$  une fonction de classe  $C^1$  et  $a$  continue sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq a(x)h(x). \quad (\text{Inégalité de Gronwall})$$

Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$ . (On pourra étudier la fonction  $x \mapsto h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$  pour  $y$  fixé).

Dans toute la suite  $f$  est une solution de  $(\mathcal{L})$ . On pose  $h = f^2 + (f')^2$ .

5. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq (q(x) - 1)h(x)$ .
6. En déduire que  $f$  et  $f'$  sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .
7. Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que  $f$  et  $f'$  sont bornées sur  $\mathbb{R}_-$ , et donc finalement sur  $\mathbb{R}$ .  
On suppose dans la suite qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) = f'(a) = 0$ .
8. Montrer que  $\forall x \in [a, +\infty[, h(x) \leq 0$ . Puis que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \geq a$ .
9. Soit :  $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a - x)$ . Déterminer une fonction  $r$  continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\Phi'' + r\Phi = 0$ .
10. En utilisant la fonction  $K = \Phi^2 + (\Phi')^2$ , conclure que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 15** Dans tout ce problème,  $k$  est un réel donné, on note  $(\mathcal{E}_k)$  l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) : xy'' + 2y' + kxy = 0.$$

On étudie sur  $\mathbb{R}_+^*$  les solutions de  $(\mathcal{E}_k)$  telles que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ .

1. Déterminer  $k$  pour que la fonction  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  soit solution de  $(\mathcal{E}_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On choisira, pour les deux questions suivantes, cette valeur de  $k$ .

2. Montrer que la fonction  $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$  vérifie la même équation différentielle  $(\mathcal{E}_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Soit  $y$  une solution de  $(\mathcal{E}_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(a) Montrer qu'il existe d'unique fonctions  $a, b \in C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telles que

$$\begin{cases} y(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x) \\ y'(x) = a(x)f'(x) + b(x)g'(x) \end{cases}$$

(b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^* : a'(x) = b'(x) = 0$ .

(c) En déduire l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et la solution de  $(\mathcal{E}_k)$  qui tend vers 1 quand  $x \rightarrow 0^+$ .

Dans la suite on prend  $k$  quelconque.

4. Effectuer dans  $(\mathcal{E}_k)$  le changement de fonction inconnue :  $y(x) = \frac{1}{x}z(x)$ .
5. En déduire toutes les solutions de  $(\mathcal{E}_k)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . (on distinguera 3 cas de figure selon que  $k = 0, k = a^2 > 0, k = -a^2 < 0$ ).
6. Montrer que, pour toute valeur de  $k$ , il existe une solution ayant pour limite 1 quand  $x \rightarrow 0^+$ .