

Exercice 1 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation:

$$z^4 + 2\lambda^2 z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4(1 + \cos \theta)^2 = 0 \quad (1)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]0, \pi[$.

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Exercice 3 Soient $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ des entiers relatifs. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs A et B tels que: $\prod_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2) = A^2 + B^2$.

Exercice 4 On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1. Calculer ω^5 et en déduire une expression de α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.
2. Montrer que $\alpha + \beta = \alpha\beta = -1$ et en déduire la valeur de α puis celle de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 5 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.

2. En déduire que $\cos \frac{\pi}{10}$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$ et donner la valeur de $\cos^2 \frac{\pi}{10}$.
3. Donner alors la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 6 Soit un entier $n \geq 2$ et $\omega_k, 0 \leq k \leq n-1$ les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans \mathbb{C} , on note $A_k, 0 \leq k \leq n-1$ leurs points images dans le plan complexe.

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} \right\| = n$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants:

1. Les points d'affixes $1, z, 1 + z^2$ sont alignés.

2. Le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z .

$$3. |z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|.$$

Exercice 8 Soient $A(a), B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc) = 0$.
2. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux de bases respectives AB, BC et AC . Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 9 Dans le plan complexe, on considère l'application f qui au point $M(z)$ fait associer le point $M'(z')$ tel que $z' = f(z)$. Caractériser géométriquement f dans chacun des cas suivants:

1. $f(z) = (2 + i)z + 1 - 3i$.
2. $f(z) = i\bar{z} + 1$. (Montrer que $f = s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$, Δ et \vec{u} à déterminer)
3. $f(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 + i$.

Exercice 10 Montrer qu'une similitude possédant deux points fixes est soit l'identité soit une symétrie axiale.

Exercice 11 Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $v = \frac{\alpha - \beta}{2}$). En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^n \mathbb{C}_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

Le plan euclidien \mathcal{P} étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 12 On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = i\sqrt{2}$.

1. Déterminer la similitude **indirecte** f du plan dans lui même telle que $f(A) = A$ et $f(C) = C$. (On déterminera α, β dans \mathbb{C} tels que $f : z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$)

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et déduire la nature de f .
3. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
4. On considère l'application g du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe $M''(z'')$ tel que $z'' = (1 + i)\bar{z} - 1 + 3i$.
 - (a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
 - (b) Montrer que $g = f \circ h$.
5. Soit D le point d'affixe $2 - 4i$ et $D'' = g(D)$. Déterminer l'affixe du point D'' , puis vérifier que le triangle ABD'' est rectangle en A .

Exercice 13 On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives:

$$z_A = 1 - 2i, z_B = 3 - i, z_{A'} = -2 + 4i \text{ et } z_{B'} = 5i$$

1. Placer ces quatre points dans le plan, et montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.
2. Soit f la similitude $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ telle que $f(z_A) = z_{A'}$ et $f(z_B) = z_{B'}$.
 - (a) Déterminer les complexes a et b sous leurs formes algébriques.
 - (b) Déterminer nature et équation de l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $f(z) = z$.
 - (c) Représenter graphiquement (Δ) sur la même figure que les points A, B, B' et A' .
 - (d) Reconnaissez-vous la nature de f ?
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i$$

- (a) Déterminer expression complexe centre et rapport de l'homothétie h telle que $g = h \circ f$.
- (b) Déduire une construction du point M' , image par g d'un point M quelconque donné du plan.