Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $(1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = 0$.

(b) $2x(1-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$.

(c) $x\ln(x)y'(x) - y = -\dfrac{1}{x}(\ln(x)+1)$.

(d) $2xy'(x) + y(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Pour chacune des équations différentielles qui suit, écrire la solution passant par le point $M(.,.)$ et tracer sommairement le graphe de la solution:

(1) $y' + 2xy = 0, \quad M(0,1)$.

(2) $y' + y\tan x = \sin x \cos x, \quad M\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

Exercice 3 Résoudre et raccorder éventuellement les équations différentielles sur $I = \mathbb{R}$:

(1) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

(2) $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

(3) $(e^x - 1)y' + (e^x+1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 4 Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2 y' + y = 1.$$

Exercice 5 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe au plus une application g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)g(t)dt. \qquad (1)$$

2. Résoudre l'équation (1), d'inconnue g, dans le cas où $f(x) = \cos(x)$.

Exercice 6 Résoudre le système diférentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 5y(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, telles que

$$\lim_{x\to\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

(1) $y'' - y = x^3 + x^2$,

(2) $y'' - 2y' + y = e^x$,

(3) $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,

(4) $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3+3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 9 Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 10 Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$: $f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 11 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

(1) $x^2 y'' - 2y = x$.

(2) $x^2 y'' + xy' + y = x\ln|x|$.

Exercice 12 Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli

$$x^2 y^2 - xy' - 3y = 0$$

en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 13 Résoudre l'équation à variables séparables suivante:

$$x^2 y' - y^2 = 1$$

et déterminer la solution qui vérife la condition $y(\dfrac{4}{\pi}) = -1$.