

**Exercice 1** Trouver les primitives des fonctions suivantes:

1.  $x^3 e^{2x}$
2.  $e^{2x} \sin 3x$
3.  $\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$
4.  $(x-1)\sqrt{x}$
5.  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
6.  $\frac{1}{x\sqrt{2-x}}$
7.  $\frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}$
8.  $\frac{x}{(x^2-4)^2}$
9.  $\frac{x-1}{x^2+2x+1}$

**Exercice 2** Calculer les primitives et intégrales suivantes en effectuant les changements de variables proposés:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x});$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (u = \sqrt{e^x - 1});$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx, \quad \left(\frac{x-1}{2} = \tanh u\right).$$

**Exercice 3** Soit  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
2. Calculer  $I_n$ .
3. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \zeta_n^k$ .

**Exercice 4** Soient  $I = \int_0^\pi x \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$ .

1. Calculer  $I$  et  $I+J$ .
2. En déduire  $J$ .

**Exercice 5** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$ . On définit  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si  $f$  est périodique,  $g$  admet une limite en  $+\infty$ .
3. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$ .

$$\text{Pour } x \geq 0, \text{ on pose } F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{1+t^2}} dt.$$

4. Étudier la branche infinie du graphe de  $F$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 6** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales

$$I_1 = \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt.$$

1. Faire le changement de variable  $t = f(u)$  dans l'intégrale  $I_2$ .
2. Calculer  $I_2$  en fonction de  $I_1$ .
3. Faire un dessin faisant apparaître  $f$  et  $f^{-1}$ , et interpréter ce résultat géométriquement.

**Exercice 7** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ . Étudier  $(u_n)$  selon la valeur de  $u_0$  et, en utilisant  $v_n = \frac{1}{u_n}$ , en donner un équivalent dans le cas  $u_0 \in ]-1; 0]$ .

**Exercice 8** Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ u_{n+1} = \sin u_n. \end{cases}$$

Donner  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ , en déduire un équivalent de  $\frac{1}{u_n^2}$  donc de  $u_n$ .

**Exercice 9** Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1.  $\cos x \ln(1+x)$  à l'ordre 4.
2.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4.

3.  $x \mapsto \tan(x)$  à l'ordre 7.
4.  $x \mapsto \ln(\cos(x))$  à l'ordre 6.
5.  $x \mapsto \exp(\sin(x))$  à l'ordre 3.
6.  $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ , à l'ordre 2.
7.  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ , à l'ordre 3.

**Exercice 10** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}.$$

**Exercice 11** Étudier la position du graphe de l'application  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$  par rapport à sa tangente en 0 et 1.

**Exercice 12** Soit  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$ .

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de  $f$  en 0 à l'ordre 2.
3. Étudier la dérivabilité du prolongement de  $f$ .

**Exercice 13** Étudier les branches infinies des fonctions :

1.  $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ .
2.  $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$ .

---

**Devoir Libre n°: 5**  
à rendre le 05 Janvier

**Exercice 14** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $\varphi_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}, \text{ et l'intégrale } I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et montrer qu'elle est convergente.
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
4. Déterminer une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .
5. Déterminer des réels  $a$  et  $b$  tels que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 15** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'intégrale :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ .

1. Déterminer une relation de récurrence entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ .
2. En déduire une expression de  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  à l'aide de factorielles.
3. Montrer l'équivalence:  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}$ .
4. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$  est constante et en déduire l'équivalence:

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n - \ln(n!) \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n.$$

5. Montrer l'équivalence :  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ .
6. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
7. Établir l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ .
8. En utilisant la question 4, en déduire que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (\text{Formule de Stirling})$$