Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =0 \\ x & -y & & =0 \\ x & +y & +z & =0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +3y & +2z & =1 \\ 2x & -2y & & =2 \\ x & +\ y & +\ z & =2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & =5 \\ x & -y & -\ z & =1 \\ x & & +\ z & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+(m+1)y & = & m+2 \\ mx+(m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} mx+(m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x-my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 3 \\ 3x-y-2z & = & 0 \\ x+y-z & = & -2 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+t & = & 5 \\ 2x+3y+4z+5t & = & 8 \\ 3x+y-z+t & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 4 Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ y+2z & = & b_3 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t & = & b_1 \\ -x+3y+t & = & b_2 \\ 2x-2y+2z-2t & = & b_3 \\ 2y+z & = & b_4 \end{array}\right.$$

Exercice 5 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & -\ y & +2z & = & a \\ -x & +2y & -3z & = & b \\ x & +2y & +\ z & = & c \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (1+\lambda)x+y+z+t & = & a \\ x+(1+\lambda)y+z+t & = & b \\ x+y+(1+\lambda)z+t & = & c \\ x+y+z+(1+\lambda)t & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 6 On considère le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{r} \left(1+10^{-n}\right)x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right.$$

Résoudre le système pour n quelconque, puis pour $n=2$ et $n=4$. Interpréter.

Exercice 7 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\operatorname{rang}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rang}(A)=2$?

Exercice 8 Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 10 Calculer les déterminants des matrices suivantes et calculer leurs inverses:

$$D_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 Soit $\Delta(x)=\det(a_{i,j}(x))$ de taille $n=2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.