Exercice 1 On considère des couples de deux droites D_1 et D_2 : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

1. $(D_1) : 3x + 5y - 2 = 0$ et $(D_2) : x - 2y + 3 = 0$
2. $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{array} \right.$
3. $(D_1) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{array} \right.$

Médiane : *Dans un triangle, une médiane est une droite reliant un sommet au milieu du côté opposé*

Exercice 2 (Médianes) On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3 (Théorème de Menelaüs) Dans le triangle ABC, on considère trois points P, Q, R, sur les côtés $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C. Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

Exercice 4 (Théorème de Pappus) Soient (A_1, A_2, A_3) et (B_1, B_2, B_3) deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points C_1, C_2 et C_3, intersections des droites (A_2B_3) et (A_3B_2), (A_3B_1) et (A_1B_3), (A_1B_2) et (A_2B_1) (que l'on suppose exister) sont alignés.

Exercice 5 (Théorème de Ceva) Dans le triangle ABC, on considère trois points P, Q, R, sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Segment : *Le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de A et B. i.e.*

$$[A, B] = \left\{ A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in [0, 1] \right\}$$

Partie convexe : *Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^d$ est dite convexe si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ le segment $[A, B]$ est inclu dans $\mathcal{C}$.*

Exercice 6 Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ?

Exercice 7 Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{ \frac{M + M'}{2} \mid (M, M') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \right\}$$

est convexe.

Exercice 8 On appelle enveloppe convexe $co(A)$ d'une partie non vide A d'un espace affine E l'intersection des ensembles convexes contenant A ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A. Que sont $co(\{A, B\}), co(\{A, B, C\})$?

Bimédianes : *Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées.*

Exercice 9 Montrer que les trois bimédianes d'un tétraèdre sont concourantes.

Exercice 10

1. Soient $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1\dots3}$ trois droites du plan affine.
   Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$.
2. Soient $(D_1 : x + 2y = 1)$, $(D_2 : x + y = 2)$, $(D_3 : 2x + y = 3)$, $(D_4 : 3x + 2y = 1)$.
   Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.