

**Exercice 1** En quels points la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ?

**Exercice 2** Soit  $n \geq 2$  un entier fixé et  $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par la formule suivante:

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x \geq 0$ .
2. En étudiant le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $f$  atteint un minimum sur  $\mathbb{R}^+$  que l'on déterminera.
3. En déduire l'inégalité suivante:

$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

4. Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$  alors on a

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

**Exercice 3** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$  telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$ .
2. En déduire que  $f'$  est constante et déterminer  $f$ .

**Exercice 4** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier en  $t = 0$ .
2. Etudier l'existence de  $f''(0)$ .

3. On veut montrer que pour  $t < 0$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où  $P_n$  est un polynôme.

- (a) Trouver  $P_1$  et  $P_2$ .
- (b) Trouver une relation de récurrence entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P'_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

**Exercice 5** Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur  $[a, +\infty[$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(a)$ . Montrer qu'il existe un élément  $c$  dans  $]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 6** 1. Par application du théorème des accroissements finis à  $f(x) = \ln x$  sur  $[n, n+1]$  montrer que  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

2. Étant donné  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ , montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}$ .

**Exercice 7** Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) et dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Posons  $p = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$  et considérons la fonction  $h(x) = f(x) - pg(x)$  pour  $x \in [a, b]$ . Montrer qu'il existe un nombre réel  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. En déduire que pour tout  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{R\`egle de l'H\^opital})$$

**Application:** Appliquer la r\`egle de l'H\^opital aux calculs des limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot ax$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{x^4 e^x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$$

**Exercice 8** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  et  $c \in ]a, b[$ .

1. On suppose  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que:

$$f(c) = \frac{f''(d)}{2} (c - a)(c - b).$$

(indication: consid\`erer la fonction  $x \mapsto f(x) - A(x - a)(x - b)$ ,  $A$  bien choisi)

2. On revient au cas g\`en\`eral. Montrer qu'il existe  $d \in ]a, b[$  tel que:

$$f(c) = \frac{b - c}{b - a} f(a) + \frac{c - a}{b - a} f(b) + \frac{f''(d)}{2} (c - a)(c - b).$$

3. Ecrire la formule avec  $c = \frac{a + b}{2}$ . Commenter.

**Exercice 9** Soit  $a$  un nombre r\`eel et  $f$  une application de classe  $C^2$  de  $]a, +\infty[$  \`a valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $f'$  et  $f''$  born\`ees ; on pose

$$M_0 = \sup_{x \geq a} |f(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \geq a} |f''(x)|.$$

1. En appliquant la formule de Taylor en  $x$  et  $x + 2h$ , montrer que,

$$\forall x > a, \forall h > 0 : |f'(x + h)| \leq hM_2 + \frac{1}{h}M_0.$$

2. En d\`eduire que  $f'$  est born\`ee sur  $]a, +\infty[$ .

3. Soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  \`a d\`eriv\`ee seconde born\`ee et telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ .

**Exercice 10** Soit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y)f(x - y) \leq f(x)^2.$$

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$ .

**Exercice 11** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que  $f$  est convexe.

**Exercice 12** Soit  $f$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  convexe croissante et non constante. Montrer que  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

**Exercice 13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe major\`ee. Que dire de  $f$  ? Et si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**Exercice 14** Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ , soit  $p > 1$ .

1. En \`ecrivant  $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$ , montrer l'in\`egalit\`e de Minkowski :

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. Soit  $(a_n)$  une suite strictement positive,  $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ .

Montrer que si  $(u_n)$  converge alors  $(v_n)$  aussi.