Exercice 1 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y=0\right\} \qquad E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x-y \geqslant 0\right\}$$
$$E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y-z+1=0\right\} \qquad E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; xy=0\right\}$$
$$E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y-z = x+y+z = 0\}$$
$$E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - z^2 = 0\}.$$

Exercice 2 Montrer que l'ensemble E des solutions (x_1, x_2, x_3) du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et la dimension.

Exercice 3 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs: $u = (x,1,0) ; v = (0,0,1)$ et $w = (1,y,1)$, x et y étant deux paramètres réels.
Etudier selon x et y la dépendance et l'indépendance de la famille (u,v,w) et donner dans chaque cas une base du sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{u,v,w\}$.

Exercice 4 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$V_1 = (0,1,2,3), V_2 = (1,2,3,4) \text{ et } V_3 = (2,3,4,5).$$

Exercice 5 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1,2,3,4)$ et $\vec{e_2}(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \text{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \text{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 6 Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2,3,-1)$ et $u_2 = (1,-1,-2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$.

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = \text{vect}\{(1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5)\}$$
$$G = \text{vect}\{(-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\}$$

Exercice 8 Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1. $\vec{v_1}=(1,0,1), \vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0), \vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$.

Exercice 9 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (4,1,4)$ et $\vec{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Montrer que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est libre. Faire de même avec $(\vec{v_1}, \vec{v_3})$, puis avec $(\vec{v_2}, \vec{v_3})$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 10 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs formant une famille libre : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 11 Soient $\vec{e_1}(0,1,-2,1), \vec{e_2}(1,0,2,-1), \vec{e_3}(3,2,2,-1), \vec{e_4}(0,0,1,0)$ et $\vec{e_5}(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\text{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = \text{vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \text{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap \text{vect}\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$.
3. $\dim(\text{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap \text{vect}\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}) = 1$.

Exercice 12 Montrer que les vecteurs $((1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1))$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1,0,0), (1,0,1), (0,0,1)$ dans cette base.

Exercice 13 Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1,x,-1), e_2 = (x,1,x), e_3 = (-1,x,1)$.