Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2 Soit f une application périodique possédant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 3 Calculer si elles existent les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{\sin e^x + e^{\sin x} + x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

5) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

8) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue croissante, non identiquement nulle et telle que: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une et une seule solution. Laquelle?
3. En déduire que f est injective.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, puis que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
5. Déterminer l'image de f et en déduire que f est bijective.

Exercice 5 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ prolongeable par continuité en 0.

Exercice 7 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Exercice 8 Etudier la définition et la continuité de $f : x \longmapsto \sqrt{x \arcsin x}$.

Exercice 9 Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On précisera les tangentes éventuelles aux points d'abscisses 0 et 1 ainsi que la position de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 10 Etudier la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.

Exercice 11 Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 12 Etudier les variations des fonctions suivantes:

$$f(x) = \arcsin \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}, \qquad g(x) = \arctan \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}} \qquad h(x) = \frac{\arcsin x}{4x^2-1}.$$

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + ... + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x \to 0} u_n(x)$.

Exercice 15 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx.$$

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Etudier la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ et déterminer $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_n(x)$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_n(x) = 0$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 18 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

Exercice 19 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Devoir Libre n°: 5

à rendre le 04 Décembre

Exercice 20 Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, v_0(x) = x, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x) + v_n(x)}{2}, \\ v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.

5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

Exercice 21 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0,1], f(a_n) = a_n^n.$$

On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.