Exercice 1 Calculer les intégrales: $\int_{-1}^{2} x\,|x|\,dx$ et $\int_{-1}^{1} x\,|x|\,dx$.

Exercice 2 Trouver les primitives des fonctions suivantes:

1. $(x-1)\sqrt{x}$
2. $\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$
3. x^3e^{2x}
4. $x^2\ln x$
5. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
6. $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$
7. $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$
8. $\dfrac{x}{(x^2-4)^2}$
9. $\dfrac{x^4}{x^3-1}$
10. $e^{2x}\sin 3x$
11. $\dfrac{1}{x\sqrt{2-x}}$
12. $\dfrac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}$

Exercice 3 Calculer les primitives et intégrales suivantes en effectuant les changements de variables proposés:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx, \quad (t=\sqrt[6]{2+x})\ ;$$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx \quad (u=\sqrt{e^x-1})\ ;$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx, \quad (\frac{x-1}{2}=\tanh u\ ).$$

Exercice 4 A l'aide d'intégrations par parties calculer les primitives suivantes:

$$\int e^x\cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n}dx\ n\in\mathbb{N} \quad ; \quad \int x\mathrm{Arctan}\,x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

Exercice 5 Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\mathrm{C}_n^k$.

Exercice 6 Soient $I=\int_0^\pi x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^\pi x\sin^2 x dx$.

1. Calculer I et $I+J$.
2. En déduire J.

Exercice 7 Etudier la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Exercice 8 Soit $f\in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.
3. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=l$.

   Pour $x\geqslant 0$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{1+t^2}}\,dt$.
4. Étudier la branche infinie du graphe de F quand $x\to+\infty$.

Exercice 9 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales

$$I_1=\int_a^b f(t)\,dt \ \text{ et } \ I_2=\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt.$$

1. Faire le changement de variable $t=f(u)$ dans l'intégrale I_2.
2. Calculer I_2 en fonction de I_1.
3. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.