

Exercice 1 Soit (u_n) une suite de nombres réels .

1. On suppose $\lim u_n = +\infty$, montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément .
2. On suppose (u_n) convergente , montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément ou un plus grand élément .

Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle non majorée; montrer qu'elle admet une sous suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 3 Soit (u_n) une suite réelle telle que les trois sous suite (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Est ce qu'on a la même conclusion si on suppose seulement la convergence des deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ?

Exercice 4 Etant donné un réel x , on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) , n \geq 1.$$

Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite bornée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}.$$

Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Exercice 6 Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \dots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

Exercice 7 Une suite (x_n) est définie par une relation de récurrence

$$x_{n+1} = a \sin x_n + b \text{ où } a \in]0, 1[\text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} : |x_{p+1} - x_p| \leq a^p |x_1 - x_0|.$$

En déduire que la suite (x_n) est une suite de Cauchy.

2. Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de $\lim x_n$ à 10^{-10} près si on suppose $a = 1/2$, $b = 5$, $x_0 = 1$?

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs .

1. On suppose que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, montrer que :

$$(a) \ell < 1 \implies \lim u_n = 0 .$$

$$(b) \ell > 1 \implies \lim u_n = +\infty .$$

2. Mêmes questions que 1. avec $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

3. Donner des exemples du cas $\ell = 1$.

4. Montrer que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$, et que la réciproque est fausse .

application : $\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)}$?

Exercice 9 Soit une suite (u_n) de nombres réels telle que

$$\lim [n(u_{n+1} - u_n)] = 1.$$

Montrer que $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 10 Soit une suite réelle (u_n) . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n},$$

on dit que (v_n) est la moyenne de Cesaro de (u_n) .

1. On suppose dans cette question que $u_n > 0$, pour tout n . Et on pose

$$w_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right).$$

On suppose que $\lim v_n = v$ et $\lim w_n = w$. Montrer que $vw \geq 1$.

2. On suppose que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim v_n = \ell$.

3. On suppose que $(u_{n+1} - u_n) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \longrightarrow \ell$.

Exercice 11 Etudier la suite (u_n) définie par une relation de récurrence, dans chacun des cas suivants :

$$1. \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases} \quad 2. \begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases} \quad 3. \begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{cases}$$

Exercice 12 On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(u_n) = u_n \\ u_n \in \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}, \quad \text{et } v_n = u_n - n\pi, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (v_n) est convergente et donner sa limite.

Devoir Libre n°: 4

à rendre le 08 Novembre

Pour tout $a \neq 0$, on considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

- Etudier les variations de la fonction

$$f : x \longmapsto x + x^2$$

et tracer son graphe ainsi que la droite $(y = x)$ dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

- Résoudre l'équation $f(x) = x$ et préciser le points d'intersection de la courbe de f avec la droite $(y = x)$.

Partie I

Dans cette partie on suppose que $a \in]-1, 0[$.

- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in]-1, 0[$.

- En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.
- Dans cette question, on note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{u_n}.$$

- Calculer la valeur de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
- En utilisant le théorème de Césaro, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

Partie II

Dans cette partie on suppose que $a \in]0, +\infty[$.

- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive et croissante.
- Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$.

Dans toute la suite, on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$$

- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

- En déduire que la suite $(v_n)_n$ est strictement croissante.
- En utilisant le fait que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et la question II.3, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n - v_0 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_0} \right)$$

- Conclure que la suite $(v_n)_n$ est convergente.