

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Etudier la limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 - 2h)}{h}.$$

Exercice 2 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $I =]-a, a[$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I . Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors f' est impaire (resp. paire).

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application T -périodique ($T > 0$), et dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que f' est aussi T -périodique.

Exercice 4 Quelles sont les fonctions, deux fois dérivable, à la fois convexes et concaves sur \mathbb{R} .

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable convexe. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable convexe bijective. Etudier la convexité de f^{-1} .

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable convexe et dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ alors f présente un minimum global en x_0 .

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable convexe.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - lx)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 9 Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 7.

4. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ à l'ordre 6.

5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 3.

6. $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$, à l'ordre 2.

7. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, à l'ordre 3.

Exercice 10 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}.$$

Exercice 11 Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 12 Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f .

Exercice 13 Étudier les branches infinies des fonctions :

1. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.
2. $g(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 14 Soit g la fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g .
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.