

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0\} \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z + 1 = 0\} \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy = 0\}$$

Exercice 2 Soient dans \mathbb{R}^3 les trois vecteurs: $u = (x, 1, 0); v = (0, 0, 1)$ et $w = (1, y, 1)$, x et y étant deux paramètres réels.

Etudier selon x et y la dépendance et l'indépendance de la famille (u, v, w) et donner dans chaque cas une base du sous espace de \mathbb{R}^3 engendré par $\{u, v, w\}$.

Exercice 3 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs

$$V_1 = (0, 1, 2, 3), V_2 = (1, 2, 3, 4) \text{ et } V_3 = (2, 3, 4, 5).$$

Exercice 4 Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

Exercice 5 Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est libre. Faire de même avec (\vec{v}_1, \vec{v}_3) , puis avec (\vec{v}_2, \vec{v}_3) .
2. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 6 Montrer que les vecteurs $((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1))$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$ dans cette base.

Exercice 7 On considère des couples de deux droites D_1 et D_2 . Etudier l'intersection $D_1 \cap D_2$ dans chaque cas.

1. $(D_1) : 3x + 5y - 2 = 0$ et $(D_2) : x - 2y + 3 = 0$
2. $(D_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{cases}$

$$3. (D_1) : 3x - 2y + 1 = 0 \text{ et } (D_2) : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$$

Médiane : Dans un triangle, une médiane est une droite reliant un sommet au milieu du côté opposé

Exercice 8 (Médianes) On considère dans P trois points A, B et C .

1. Déterminer dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) des équations pour les médianes du triangle ABC .
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 9 (Théorème de Ceva) Dans le triangle ABC , on considère trois points P, Q, R , sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C . Montrer que les droites $(AP), (BQ)$ et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Bimédianes : Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées.

Exercice 10 Montrer que les trois bimédianes d'un tétraèdre sont concourantes.

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Exercice 12 Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

Exercice 13 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\text{rang}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rang}(A) = 2$?

Exercice 14 Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 16 Calculer les déterminants des matrices suivantes et calculer leurs inverses:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Devoir Libre n°: 3

à rendre le 23 Octobre

Faites des figures convenables pour traiter chacune des questions suivantes.

1. Dans le triangle ABC , on considère trois points P, Q, R , sur les côtés (BC) , (AC) et (AB) respectivement, ces points n'étant pas les points A, B ou C . Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1. \quad (\text{Théorème de Menelaüs})$$

Soit ABC un triangle du plan (trois points non alignés). On dit que (a, b, c) est un système de **coordonnées barycentriques** de M dans (A, B, C) si $a + b + c \neq 0$ et si M est barycentre de A, B et C affectés des coefficients a, b et c .

2. Montrer que tout point M possède un et un seul système de coordonnées barycentriques (a, b, c) vérifiant $a + b + c = 1$.
3. Montrer que deux triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont des systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point si et seulement si, ils sont proportionnels.
4. Montrer que $(\text{Det}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}), \text{Det}(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}), \text{Det}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$ est un système de coordonnées barycentriques de M .

Soient P, Q et R les points de coordonnées barycentriques $(0, 1, -a)$, $(-b, 0, 1)$ et $(1, -c, 0)$ dans (A, B, C) où a, b et c sont des réels. Et soient P', Q' et R' les points de coordonnées barycentriques $(0, -a, 1)$, $(1, 0, -b)$ et $(-c, 1, 0)$.

5. Montrer que les points P, Q et R sont alignés si et seulement si P', Q' et R' sont alignés.
La droite $P'Q'R'$ est alors appelée la **droite isotomique** de la droite PQR . On note I, J et K les milieux des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$.
6. Montrer que les points I, J et K sont alignés si et seulement si P, Q et R sont alignés.
La droite IJK est alors appelée la **droite de Newton** de la droite PQR .
7. Si P, Q et R sont alignés, déterminer le rapport entre le centre de gravité G de ABC , la droite isotomique et la droite de Newton de PQR .