

**Exercice 1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application croissante telle que  $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ . Montrer que  $f = Id_{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 2** Soit  $f$  une application périodique possédant une limite en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 3** Calculer si elles existent les limites suivantes:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin e^x + e^{\sin x} + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}})$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

**Exercice 4** Montrer à l'aide de la définition que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-4x+1} = -\frac{3}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2} = 1.$$

**Exercice 5** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue croissante, non identiquement nulle et telle que:  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : f(xy) = f(x) + f(y)$ .

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une et une seule solution. Laquelle?
3. En déduire que  $f$  est injective.
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , puis que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .
5. Déterminer l'image de  $f$  et en déduire que  $f$  est bijective.

**Exercice 6** Soit l'application:

$$f : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  vers son image que l'on précisera.

**Exercice 7** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  prolongeable par continuité en 0.

**Exercice 9** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  prolongeable par continuité en 0 et en 1.

**Exercice 10** Etudier la définition et la continuité de  $f : x \mapsto \sqrt{x} \arcsin x$ .

**Exercice 11** Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction  $f$  définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On précisera les tangentes éventuelles aux points d'abscisses 0 et 1 ainsi que la position de la courbe par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

**Exercice 12** Etudier la fonction  $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$ .

**Exercice 13** Tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto \arcsin(\sin x)$ .

**Exercice 14** Etudier les variations des fonctions suivantes:

$$f(x) = \arcsin \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}, \quad g(x) = \arctan \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x - \sqrt{1-x^2}}, \quad h(x) = \frac{\arcsin x}{4x^2 - 1}.$$

**Exercice 15**

1. Résoudre l'équation  $\arcsin(2x) = \arccos(x)$  d'inconnue  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .
2. Résoudre l'équation  $\arcsin(x+1) - \arcsin(x) = 0$  d'inconnue  $x \in [-1, 0]$ .
3. Résoudre l'équation  $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  simplifier  $\arctan(k+1) - \arctan(k)$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$ .