

Exercice 1 Calculer les déterminants d'ordre n suivants:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & a+3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & a+n \end{vmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* .$$

3) $\det \left((ia + jb)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \quad a, b \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^t \text{Com} A$.

1. Montrer que tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de B .
2. Déterminer le rang de B suivant celui de A .

Exercice 3 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1, \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \in [0, 1[.$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$.

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) + 2 \leq n$. Montrer que:

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 5 Soient x_0, x_1, \dots, x_n $n+1$ réels distincts deux à deux. Montrer que la famille

$$((X - x_0)^n, (X - x_1)^n, \dots, (X - x_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , telle que

$$f^2 = -Id_E.$$

Montrer que n est pair.

Exercice 7 Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}$, tel que $a_1 \neq a_2$, et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^4$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, unique tel que:

$$\begin{cases} \deg(P) \leq 3, \\ P(a_1) = \lambda_1, P(a_2) = \lambda_2, \\ P'(a_1) = \mu_1, P'(a_2) = \mu_2. \end{cases}$$

Généraliser.

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$.

1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_j))_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. En déduire la valeur de $\det \left((P(z + j + k))_{0 \leq j, k \leq n+1} \right)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9 On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, on note α_i l'application

$$\begin{aligned} \alpha_i : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(x_i) \end{aligned}$$

1. Vérifier que chaque α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. On note G l'espace engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Déterminer G° . En déduire que la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Montrer que la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

5. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes (P_0, \dots, P_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2 \quad P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En déduire que pour toute fonction continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il existe un polynôme P de degré n , qui interpole f en chaque point x_i , c'est à dire qui satisfait :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i).$$