Exercice 1 On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice $N = A^2 - 8A + 12I_3$.
2. Endéduire la matrice A^{-1}.

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{array}{lcl} f(e_1) = -3e_2 + 3e_3 & & e_1 = (1,0,0) \\ f(e_2) = -4e_1 - 4e_2 + 4e_3 & \text{avec} & e_2 = (0,1,0) \\ f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3 & & e_3 = (0,0,1) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker f$, et $\operatorname{Im} f$.
3. On pose $u_1 = (-2,1,2), u_2 = (-1,-1,1)$ et $u_3 = (-2,1,-1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Trouver les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n).
   (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 4 Soit le système d'équations de récurrence linéaires:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ On pose } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

1. Mettre le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = MX_n$.
2. On pose $N = M - I_3$, calculer N^2, N^3 et N^n et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer X_n en fonction de X_0.

Exercice 5 Soit $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[X]$, et soit soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On considère l'application:

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}; P \longmapsto (1-X)^2 P(0) + 2X(1-X)P(\frac{1}{2}) + X^2 P(1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1-X^2, X(1-X), X^2)$ est une base de $\mathbf{E}$ et déterminer les matrices de passage: $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et P^{-1}.
2. Montrer que f est linéaire et déterminer les matrices: $M_{\mathcal{B}}(f), M_{\mathcal{B}'}(f), M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 6 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que:

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible. (Théorème d'Hadamard).

Exercice 7 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi qu'une base de vecteurs propres.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Donner les termes généraux x_n et y_n.