

Fonctions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

Changement de variable: $t = \tan \frac{x}{2}$, on a donc $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ et les formules:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemples: 1. $\int \sin^3 \cos^4 x dx$. 2. $\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx$. 3. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$.

4. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x} dx$.

Fonctions rationnelles en e^x

Changement de variable: $t = th \frac{x}{2}$ ou $t = e^x$, on a donc $dx = \frac{2}{1-t^2} dt$ et les

formules: $shx = \frac{2t}{1-t^2}$, $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $thx = \frac{2t}{1+t^2}$.

Exemples: 1. $\int \frac{chx-1}{chx+1} e^x dx$. 2. $\int \frac{1}{chx(1+shx)} dx$. 3. $\int \frac{dx}{1+thx}$.

4. $\int \frac{shx}{1+th^2 x} dx$.

Fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Changement de variable: $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, et on se ramène à une fraction rationnelle en t .

Exemples: 1. $\int \frac{1}{x\sqrt{2-x}} dx$. 2. $\int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}} dx$. 3. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$.

4. $\int x \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx$.

Fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tq $b^2-4ac \neq 0$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 , on se ramène à une intégrale de la forme précédente, ou bien on distingue les deux cas:

$$+ a > 0. \text{ On écrit } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \text{ puis le}$$

changement de variable

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} ch(t) \text{ avec } t \geq 0.$$

+ $a < 0$. On écrit $ax^2 + bx + c = -a \left[\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]$, puis le

changement de variable

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \sin(t) \text{ avec } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

- Si $\Delta < 0$, alors $a > 0$, on écrit $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$, puis

le changement de variable

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} sh(t)$$

Exemples: 1. $\int \sqrt{2-2x+x^2} dx$. 2. $\int \frac{1}{x-2+\sqrt{2-2x+x^2}} dx$.

3. $\int \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{2-3x+x^2}} dx$.

Exercice 1 Etudier les suites:

1. $u_n = \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right]$.

2. $u_n = n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right]$.

3. $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 Calculer les intégrales: $\int_{-1}^2 x|x| dx$ et $\int_{-1}^1 x|x| dx$.

Exercice 3 1. Calculer $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

2. Utiliser la commande Maple: $\> \text{sum}(((b-a)/n)*f(a+(k*(b-a)/n)), k=1..n);$
 pour différentes valeurs de n puis comparer avec la valeur exacte $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

Exercice 5 Trouver les primitives des fonctions suivantes:

1. $(x-1)\sqrt{x}$.
2. $\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$.
3. $x^3 e^{2x}$.
4. $x^2 \ln x$.
5. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
6. $e^{2x} \sin 3x$.
7. $\sqrt{1-\cos x}$.
8. $\ln^2 x$.
9. $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de définition
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	\mathbb{R}
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\ln x$	$x \ln x - x$	\mathbb{R}_+^*
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$
$1 + \cotan^2 x$	$-\cotan x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$
$\text{sh} x$	$\text{ch} x$	\mathbb{R}
$\text{ch} x$	$\text{sh} x$	\mathbb{R}
$1 - \text{th}^2 x$	$\text{th} x$	\mathbb{R}
$\text{coth}^2 x - 1$	$-\text{coth} x$	\mathbb{R}^*
$\text{th} x$	$\ln(\text{ch} x)$	\mathbb{R}
$\text{coth} x$	$\ln \text{sh} x $	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} = \text{argch}(x), x \geq 1$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$