Exercice 1 Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions suivantes:

$$a)\ \frac{1}{(X^2+1)^2(X-1)^2} \qquad b)\ \frac{1}{(X^2+1)^2-X^2},$$
$$c)\ \frac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)} \qquad d)\ \frac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}.$$

Exercice 2 Quelques applications de la décomposition en éléments simples:

1. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction rationnelle:
$$x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

2. Calculer la limite de la suite $(S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} u_k)_{n\geqslant 3}$, avec
$$u_k = \frac{4k-1}{k(k-2)(k+1)}.$$

3. Même question que 2) avec $u_k = \dfrac{k}{1+k^2+k^4}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

4. Soit P un polynôme à coefficients complexes, admettant n racines distinctes.
Montrer que toute racine de P' est barycentre avec coefficients positifs des racines de P. (utiliser la fraction $\frac{P'}{P}$).

5. **Calcul intégral:** En utilisant la décomposition en élments simples, on se ramène à des intégrales de la forme $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$ ou $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ avec $p^2-4q<0$.

   - Pour $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$, on a $\int \dfrac{dx}{(x-a)} = \ln(x-a)$ et $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n} = \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$, si $n \geqslant 2$.
   - Pour $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$, on remarque que $\int \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ peut se mettre sous la forme
   $$\alpha \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx \text{ (qui est une primitive usuelle)}$$
   $$+\beta \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$
   pour laquelle on utilise le changement de variable $t = \dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ pour se ramener au calcul de
   $$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

   (a) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

   (b) Calculer les intégrales: $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}dx$; $\int \dfrac{x}{(x^2-4)^2}dx$; $\int \dfrac{x^4}{x^3-1}dx$.

Exercice 3 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.