Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 20 –

Exercice 1 Etudier la nature des séries:

$$\sum \frac{3^n}{4^n+1} \qquad \sum \frac{\ln(n)}{n^2} \qquad \sum \frac{n^3}{n!} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$$

$$\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \qquad \sum \frac{1}{\ln(n+1)} \qquad \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n} \qquad \sum (\arcsin(\frac{1}{n}))^n$$

Exercice 2 Même question avec les séries de terme général

$$\sum \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad \sum \frac{x^n}{1+y^{2n}}; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+2n+2}) \qquad \sum (2+\frac{\sin(n)}{n})^{-n}.$$

Exercice 3 Même question avec les séries de terme général

$$u_n = \int_n^{2n} \frac{1}{1+t\sqrt{t}} dt \qquad v_n = \frac{1}{1+\sqrt[2]{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}} \qquad w_n = \frac{v_n}{n}$$

Exercice 4 On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n+1}{2}} \end{cases}$$

et on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - x_n$.
Étudier la suite (x_n) et déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 5 Quel est le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$?

Exercice 6 Pour $n \geqslant 0$ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$

Ecrire a_n , puis $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, sous forme d'une intégrale simple. En déduire que $\sum a_n$ a pour somme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt$.
Calculer cette somme.

Exercice 7 Soit $\sum a_n$ une série de $\mathbb{R}^{+*}$ divergente et (S_n) la suite de ses sommes partielles. On note $u_n = \dfrac{a_n}{S_n}$ et $v_n = \dfrac{a_n}{S_n^2}$.
Etudier la nature des séries $\sum n_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 8 On définit f par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
Trouver le domaine de définition de f. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)$.
Calculer $f(1)$.

Exercice 9 La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n). \end{cases}$$

On pose $v_n = 2^n u_n$.

1. Calculer $\lim u_n$
2. Montrer $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1 - \dfrac{u_n^2}{3} + o(u_n^2))$.
3. Donner un équivalent simple de $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{4}{u_n^2}$ puis de $\dfrac{1}{v_{n+1}^2} - \dfrac{1}{v_n^2}$
4. Montrer que la suite (v_n) converge vers un réel $\lambda > 0$ et que

$$u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{\lambda^3}{9 \times 2^{3n-2}} + o(\frac{1}{2^{3n}}).$$

Exercice 10 Etudier la nature de la série de terme général $(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n})^\alpha x^n$.
Calculer la somme dans le cas $\alpha = 1$.

Exercice 11 Etudier le produit des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ dans les cas suivants

$$x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 12 Déterminer les rayons de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ si

$$a_n = n \qquad a_n = \ln(n) \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad a_n = \frac{n^2+1}{n!}$$