Exercice 1 (Calcul dans un anneau commutatif) Soient A un **anneau commutatif**, $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_p) \in A^p$.

1. Etablir la formule dite du *multinôme de Newton*:
$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum_{\substack{(k_1,..,k_p)\in\mathbb{N}^p \\ k_1+..+k_p=n}} \frac{n!}{k_1!..k_p!} x_1^{k_1} ... x_p^{k_p} .$$
elle généralise la formule du binôme
$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_1^k x_2^{n-k}, \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in A$ tel que $(1+x)$ inversible, on a:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = (1+x)^{-1} .$$
3. Montrer que pour tout a, b dans A, et pour tout $n \geqslant 2$:
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k .$$

Exercice 2 (Partie entière) On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : E(x+n) = E(x) + n$.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.
3. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x) = E(\frac{E(nx)}{n})$.
5. Montrer:
$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx).$$
6. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

Exercice 3 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a:
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
En déduire un encadrement de la somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $N \geqslant 1$.

Exercice 4 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec A bornée et $B \subset A$. Comparer $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$.

Exercice 5 Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ avec $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 6 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, $a \in A$. On note:
$$\begin{aligned} -A &= \{-x \mid x \in A\}; \\ A + B &= \{x = a + b \mid (a,b) \in A \times B\}; \\ a + A &= \{a + x \mid x \in A\} \\ AB &= \{x = ab \mid (a,b) \in A \times B\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf A$.
2. Montrer que : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
3. Montrer que $\sup(a+A) = a + \sup A$.
4. Si de plus A et B sont inclus dans $\mathbb{R}_+$, montrer que:
$$\sup(AB) = \sup A \sup B.$$

Exercice 7 Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que : $\sup\limits_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est bornée et déterminer $\sup A \cup B$ et $\inf A \cup B$.

Exercice 9 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1]\cap\mathbb{Q}\ ,\ ]0,1[\cap\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\right\},\ \left\{\frac{n-1/n}{n+1/n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 10 Soit

$$I=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x+\frac{1}{2x}\leqslant 2\right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 11 Soit $E=\{\frac{1}{n}\cos n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 12 Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x<\sup A$, alors $\sup(A\setminus\{x\})=\sup A$.
2. Montrer que si $\sup(A\setminus\{x\})<\sup A$, alors $x=\sup A$.

Devoir Libre n°: 2

à rendre le 02 Octobre

Exercice 13 Soit (u_n) une suite de nombres réels .

1. On suppose $\lim u_n=+\infty$, montrer que $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément .
2. On suppose (u_n) convergente , montrer que $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément ou un plus grand élément .

Exercice 14 Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer:

$$\inf_i(\sup_j a_{ij})\quad\text{avec}\quad\sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 15 Pour une une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, on définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_n=\sup\left\{u_p\mid p\geqslant n\right\}\ \text{ et } b_n=\inf\left\{u_p\mid p\geqslant n\right\}.$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_n=\dfrac{1}{n+1}+(-1)^n$.
   (a) Calculer dans ce cas a_n et b_n.
   (b) Calculer $\lim a_n$ et $\lim b_n$.
2. Dans le cas général, étudier les monotonies des suites (a_n) et (b_n) .
3. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées et comparer alors

$$\alpha=\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}\ \text{ et } \beta=\sup\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}.$$

4. Montrer qu'il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_{\varphi(n)}=\alpha$.