

Dans toute la suite  $E$  désigne  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique.

**Exercice 1** Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$ .

En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

**Exercice 2** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espace vectoriels supplémentaires de  $E$  et  $p$  le projecteur de  $E$  d'axe  $F$  et de direction  $G$ .

- On suppose que  $F \perp G$ . Montrer que  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .
- On suppose que  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .
  - Soient  $a \in F$  et  $b \in G$ . Montrer que  $\|a + b\| \geq \|a\|$ .
  - En déduire que  $F \perp G$ .

**Exercice 3** Ici  $n = 3$  pour tout  $v \in E$ , on note  $f_v : E \rightarrow E, x \mapsto v \wedge x$ .

- Soit  $v \in E$ , on note  $(p, q, r)$  ses coordonnées dans une b.o.n.d  $\mathcal{B}$  de  $E_3$ .
  - Montrer que :  $\forall x, y \in E : (f_v(x) | y) = -(x | f_v(y))$ .
  - Déterminer  $\ker(f_v)$  et  $\text{Im}(f_v)$ .
  - Déterminer la matrice de  $f_v$  dans la base  $\mathcal{B}$ , remarquer qu'elle est antisymétrique.
- Réciproquement soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , vérifiant 1.(a).  
Montrer qu'il existe un unique vecteur  $v \in E$ , tel que  $f = f_v$ .

**Exercice 4** On considère deux rotations  $f$  et  $g$  de  $E$  ( $n = 3$ ) qui commutent et qui ne sont ni  $\text{Id}_E$  ni des demi-tours.

Que peut-on dire de  $f$  et  $g$ ?

**Exercice 5** Etudier dans chacun des deux cas suivants l'endomorphisme de  $E$  ( $n = 3$ ) donné par sa matrice  $A$  dans la base canonique:

$$1) A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2) A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6** Soit  $u \in \mathcal{O}^-(E)$ . On pose  $F = \ker(u + \text{id})$ , ( $n = 3$ ).

- Montrer que  $F \neq \{0\}$  et que  $F$  et  $F^\perp$  sont stables par  $u$ . Pour quelle raison  $\dim(F) \neq 2$ ?
- On suppose  $E \neq F$ . Montrer que la restriction de  $u$  à  $F^\perp$  est une rotation.
- En déduire qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et une base  $\varepsilon$  de  $E$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7** Soit  $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 : |a_{i,j}| \leq 1 \quad \text{et que} \quad \left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n.$$

**Exercice 8** Soit  $E$  euclidien,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in E^{2n}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (x_i | x_j) = (y_i | y_j).$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal  $f$  de  $E$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i.$$

**Exercice 9** Pour tout  $f \in L(E)$ , on note  $f^*$  l'application définie par

$$\forall x, y \in E : (f(x) | y) = (x | f^*(y)).$$

- Justifier la définition de  $f^*$  et montrer que  $f^*$  est linéaire.
- Montrer que :  $f \in O(E) \iff f \circ f^* = \text{Id}_E$ .