© B. Seddoug

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 Soient $H_1 = \ker \varphi_1$, $H_2 = \ker \varphi_2$ et $H_3 = \ker \varphi_3$ trois hyperplans de E, tels que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre dans le dual E^*.
Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$.

Exercice 2 Soit (Σ) le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Déterminer la dimension et une base de F.

Exercice 3 Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E tels que $\dim E_1 = \dim E_2$. Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel F de E, tel que: $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.

Exercice 4 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que:

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 5 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

1. Montrer que $rg(u) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^3$ tels que:$\forall x \in \mathbb{R}^3 : u(x) = f(x).a$.

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$ et soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.
2. Déterminer les endomorphismes de E qui commutent avec f.

Exercice 7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(u) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ unique tel que $u^2 = \lambda u$.
2. On suppose $\lambda \neq 1$. Montrer que $u - Id_{\mathbf{E}}$ est un automorphisme et calculer $(u - Id_{\mathbf{E}})^{-1}$.

Exercice 8 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(a) $\ker f = \ker f^2$.

(b) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

(c) $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 9 Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, tel que : $(f+g)$ est inversible et $fg = 0$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n.$$

Exercice 10 Soit U un sous-espace vectoriel de E, et

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid U \subset \ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Si $\dim E = n$, quelle est la dimension de A ?

Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$ et $n = \dim E$.

1. Montrer que f est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n = 2p$.
2. Soit $x \neq 0$, monter que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.
3. Montrer qu'il existe p sous-espaces de dimension deux stables par f, $E_1 ... E_p$ tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Exercice 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente et $n = \dim E$. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e.:

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* \mid f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leqslant n$.
2. Soit $r = \dim \ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que

$$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$