

Dans toute la suite \mathbb{K} désigne un sous corps de \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Exercice 1 Soit \mathbb{R}_+^* muni de la loi interne \oplus définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe \otimes telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 3 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les trois fonctions

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \sin 2x, \quad x \mapsto \sin 3x,$$

sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.

Exercice 4 Si L, M, N sont trois sous-espaces vectoriels de E , a-t-on :

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N ?$$

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F .

Exercice 6 Dans \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) muni de sa structure de \mathbb{R} -ev, on pose $e = (1, 1, \dots, 1)$ et

$$H = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n et que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}.e \oplus H$.

Exercice 7 Soit E le \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

1. Montrer l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(1)$ est une forme linéaire surjective.

On pose $H = \ker(\varphi)$.

2. Déterminer toutes les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et montrer que leur ensemble est un sous espace vectoriel de E , on le notera D .
3. Montrer que $E = H \oplus D$.

Exercice 8 $E = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0 \right\}$. On pose

$$E_1 = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} + x_n = 0 \right\}, \text{ et}$$

$$E_2 = \left\{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \right\}.$$

1. Montrer que E est un \mathbb{R} -ev et que E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
3. Donner une base E_1 une base de E_2 et en déduire une base de E .

Exercice 9 Soient U, V, W des s.e.v. d'un e.v. E , vérifiant

$$U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W. \quad (I)$$

1. Démontrer que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w). \quad (II)$$

Exercice 10 Soit

$$E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge} \right\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergent vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E .

Exercice 11 Soit $f \in L(E)$ telle que $\forall x \in E, (x, f(x))$ liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 12 Soit $f \in L(E)$ telle que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que

$$E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E).$$

Exercice 13 Soit p un projecteur de E et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$. Montrer que $Id_E - \lambda p \in GL(E)$.

Exercice 14 Soit $f \in L(E)$, montrer que

1. $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.
2. $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Im}(f) + \ker(f) = E$.