

Exercice 1 1. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

2. Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}$.

Exercice 2 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)}$ est bornée sur \mathbb{R} avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| = o\left(\frac{n!}{a^n}\right),$$

a constante fixée. Montrer que $\forall x \in [-a, a], f(x) = 0$, puis que $f = 0$.

Exercice 3 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2.$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$.

Exercice 4 Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.

2. Posons $p = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 5 Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot ax$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{x^4 e^x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$$

Exercice 6 Soit a un nombre réel et f une application de classe C^2 de $]a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose f' et f'' bornées ; on pose $M_0 = \sup_{x \geq a} |f(x)|$ et

$$M_2 = \sup_{x \geq a} |f''(x)|.$$

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x + 2h$, montrer que,

$$\forall x > a, \forall h > 0 : |f'(x+h)| \leq hM_2 + \frac{1}{h}M_0.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.

3. Soit $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée et telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$.

Exercice 7 Soit f une fonction C^2 sur \mathbb{R} convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe majorée. Que dire de f ? Et si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$?

Exercice 9 Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$, soit $p > 1$.

1. En écrivant $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. Soit (a_n) une suite strictement positive, $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$. Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) aussi.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 sur \mathbb{R} telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.