1. Sommes de Riemann

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et donner un équivalent de $u_n-\ell$.

3. Soient f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

4. Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $I_n=\int_a^b f(t)\sin(nt)dt$, pour $n\in\mathbb{N}$.
   (a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n\to 0$.
   (b) Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
   (c) En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

2. Intégrales de fonctions rationnelles

En utilisant la décomposition en élments simples, on se ramène à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)^n}$ ou $\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ avec $p^2-4q<0$.

1. Pour $\int\frac{dx}{(x-a)^n}$, on a $\int\frac{dx}{(x-a)}=\ln(x-a)$ et $\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$, si $n\geqslant 2$.

2. Pour $\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$, on remarque que $\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx \text{ (qui est une primitive usuelle)}$$
$$+\beta\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx$$

pour laquelle on utilise le changement de variable $t=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ pour se ramener au calcul de

$$I_n=\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

   (a) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   (b) Calculer les intégrales: $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int\frac{x-1}{x^2+2x+1}dx$; $\int\frac{x}{(x^2-4)^2}dx$; $\int\frac{x^4}{x^3-1}dx$.

3. Intégrales de fonctions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

Changement de variable: $t=\tan\frac{x}{2}$, on a donc $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ et les formules: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$.

Exemples: 1. $\int\sin^3\cos^4 x dx$. 2. $\int\frac{1}{\cos x\sin^3 x}dx$. 3. $\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$. 4. $\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}dx$.

4. Intégrales de fonctions rationnelles en e^x

Changement de variable: $t=th\frac{x}{2}$ ou $t=e^x$, on a donc $dx=\frac{2}{1-t^2}dt$ et les formules: $shx=\frac{2t}{1-t^2}$, $chx=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $thx=\frac{2t}{1+t^2}$.

Exemples: 1. $\int\frac{chx-1}{chx+1}e^x dx$. 2. $\int\frac{1}{chx(1+shx)}dx$. 3. $\int\frac{dx}{1+thx}$. 4. $\int\frac{shx}{1+th^2x}dx$.

5. Intégrales de fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Changement de variable: $t=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, et on se ramène à une fraction rationnelle en t.

Exemples: 1. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{2-x}}dx$. 2. $\int \dfrac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx$. 3. $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}dx$.
4. $\int x\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}dx$.

6. Intégrales de fonctions rationnelles en x et en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ tq $b^2-4ac\neq 0$

- Si $\Delta=b^2-4ac>0$ le polynôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2, on se ramène à une intégrale de la forme précédente, ou bien on distingue les deux cas:

  \+ $a>0$. On écrit $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, puis le changement de variable

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}ch(t) \text{ avec } t\geqslant 0.$$

  \+ $a<0$. On écrit $ax^2+bx+c=-a\left[\dfrac{\Delta}{4a^2}-\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]$, puis le changement de variable

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\sin(t) \text{ avec } t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

- Si $\Delta<0$, alors $a>0$, on écrit $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$, puis le changement de variable

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}sh(t)$$

Exemples: 1. $\int \sqrt{2-2x+x^2}dx$. 2. $\int \dfrac{1}{x-2+\sqrt{2-2x+x^2}}dx$.
3. $\int \dfrac{x^2}{(x-1)\sqrt{2-3x+x^2}}dx$.

7. Intégrales de Wallis, formule de Stirling

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x. \qquad \text{(Intégrales de Wallis)}$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n . On en déduit l'expression $I_{2n}=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$
2. Montrer l'équivalence: $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $J_n=(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence:
$$I_{2n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$s_n=\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+n \text{ et } u_n=s_n-s_{n-1}.$$
4. On a l'équivalence :
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{12n^2}.$$
On en déduit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc avec $C=\lim\limits_n e^{s_n}>0$, on a:
$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
5. En utilisant la question , en déduire que :
$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}. \qquad \text{(Formule de Stirling)}$$