Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 On note A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice $N = A^2 - 8A + 12I_3$.
2. Endéduire la matrice A^{-1}.

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{array}{lcl} f(e_1) = -3e_2 + 3e_3 & & e_1 = (1,0,0) \\ f(e_2) = -4e_1 - 4e_2 + 4e_3 & \text{avec} & e_2 = (0,1,0) \\ f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3 & & e_3 = (0,0,1) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker f$, et $\operatorname{Im} f$.
3. On pose $u_1 = (-2,1,2), u_2 = (-1,-1,1)$ et $u_3 = (-2,1,-1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Trouver les relations de récurrence vérifiées par les suites (a_n) et (b_n).
   (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 4 Soit le système d'équations de récurrence linéaires:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \text{On pose } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

1. Mettre le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = MX_n$.
2. On pose $N = M - I_3$, calculer N^2, N^3 et N^n et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer X_n en fonction de X_0.

Exercice 5 Soit $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[X]$, et soit soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On considère l'application:

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}; P \longmapsto (1 - X^2)P(0) + 2X(1 - X)P(\frac{1}{2}) + X^2P(1)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (1 - X^2, X(1 - X), X^2)$ est une base de $\mathbf{E}$ et déterminer les matrices de passage: $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et P^{-1}.
2. Montrer que f est linéaire et déterminer les matrices: $M_{\mathcal{B}}(f), M_{\mathcal{B}'}(f), M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Quelle est la relation entre $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$?

Exercice 6 Soit une famille de polynômes $(P_0, P_1, ..., P_n)$,$n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout i $\deg(P_i) = i$. Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.
2. On suppose $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$. Montrer que la famille $(P, P', ..., P^{(n)})$ est libre.

Exercice 7 On note $\mathbf{E} = \mathbb{R}_n[X]$:$\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degrés $\leqslant n \neq 0$.
Soit $\Delta : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}, P \longmapsto \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.
2. Déterminer image et noyau de Δ.
3. Etablir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Exercice 8 Dans l'espace $\mathcal{P}_5$ des polynômes de degré $\leqslant 5$, on définit les sous-ensembles :
$E_1 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P(0) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$
$E_3 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.
2. Déterminer dans $\mathcal{P}_5$ un sous-espace supplémentaire de $E_1 \cap E_3$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, Démontrer que le système $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

Exercice 10 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unique tel que:
$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n.$$
2. Donner une relation entre P'_n et P_{n-1}, pour tout n.
3. Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, P_1, \ldots, P_n$, et en déduire une relation de récurrence donnant P_n en fonction de $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Exercice 11 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 12 Montrer que les polynômes
$$A = X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ et } B = X^2 + X + 1$$
sont premiers entre eux et déterminer tous les couples (U, V) de polynômes tels que: $UA + VB = 1$.

Exercice 13 On considère le polynôme:
$$P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108.$$
Calculer le *pgcd* de P et P' et en déduire une factorisation de P.

Exercice 14 Montrer que pour tout polynôme P, $P - X$ divise $P \circ P - X$.
Application: Résoudre l'équation: $x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Exercice 15 Soit E l'ensemble des fractions rationnelles F qui peuvent s'écrire
$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \qquad P \text{ polynôme de degré } \leqslant 6.$$
Les fractions $\dfrac{1}{(X-1)}$, $\dfrac{1}{(X-1)^2}$, $\dfrac{1}{(X-1)^3}$, $\dfrac{1}{X^2+1}$, $\dfrac{X}{X^2+1}$, $\dfrac{1}{(X^2+1)^2}$, $\dfrac{X}{(X^2+1)^2}$ forment-elles une base de E ?

Exercice 16 Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions suivantes:
$$a)\ \frac{1}{(X^2+1)^2(X-1)^2} \qquad b)\ \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2},$$
$$c)\ \frac{X^2+1}{(X-1)^4(X^3+1)} \qquad d)\ \frac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}.$$

Exercice 17 Quelques applications de la décomposition en éléments simples:

1. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction rationnelle:
$$x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$
2. Calculer la limite de la suite $(S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} u_k)_{n \geqslant 3}$, avec
$$u_k = \frac{4k-1}{k(k-2)(k+1)}.$$
3. Même question que 2) avec $u_k = \dfrac{k}{1+k^2+k^4}$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
4. Soit P un polynôme à coefficients complexes, admettant n racines distinctes.
Montrer que toute racine de P' est barycentre avec coefficients positifs des racines de P. (utiliser la fraction $\frac{P'}{P}$).

Exercice 18 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.