Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 15 –

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Montrer que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Exercice 3 Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ par :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, v_0(x) = x, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x) + v_n(x)}{2}, \\ v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x) v_n(x)} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite ℓ_x.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \ell_x$. Calculer $f(1), f(0)$, donner $f(\dfrac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$ si $x > 0$. Montrer que f est croissante, en déduire le sens de variations de $x \to \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Montrer que f est dérivable en 1 (on utilisera $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1+x}{2}$) puis que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de f, préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en $+\infty$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, on définit :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + \ldots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} u_n(x)$.

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0,1], f(a_n) = a_n^n.$$

On suppose f strictement décroissante. Montrer que a_n est unique et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0, \; f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f^n(t) dt.$$

Exercice 7 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Exercice 8 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue ; calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx.$$

Exercice 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Etudier la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_n(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} f_n(x) = 0$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.