Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \sin 2x, \quad x \mapsto \sin 3x,$$

sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.

Exercice 2 Soit

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 3 $E = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\right\}$. On pose

$$E_1 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} + x_n = 0\right\}, \text{ et}$$
$$E_2 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\right\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et que E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
3. Donner une base E_1 une base de E_2 et en déduire une base de E.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, (x, f(x))$ liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 5f + 6Id_{\mathbf{E}} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que

$$E = \ker(f - 2Id_{\mathbf{E}}) \oplus \ker(f - 3Id_{\mathbf{E}}).$$

Exercice 6 Soit p un projecteur de E et $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$. Montrer que $Id_{\mathbf{E}} - \lambda p \in GL(E)$.

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

1. $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_{\mathbf{E}}\}$.
2. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) + \ker(f) = E$.

Exercice 8 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(a) $\ker f = \ker f^2$.

(b) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.

(c) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 9 Soit U un sous-espace vectoriel de E, et

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid U \subset \ker(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Si $\dim E = n$, quelle est la dimension de A ?

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente et $n = \dim E$. On note $q \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f, i.e.:

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* \mid f^j = 0\}.$$

1. Montrer que : $\exists x_0 \in E$ tel que $\{x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_o)\}$ soit libre. En déduire $q \leqslant n$.
2. Soit $r = \dim \ker(f)$. Montrer que $r > 0$ et que

   $$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$

   ind: $\mathrm{Im}(f) \subset \ker f^{q-1}$ et $f_{|\ker f^{q-1}}$ est nilpotente d'indice $q-1$ (si $q > 1$) . Donc $\dim E = r + \dim \mathrm{Im}\, f \leqslant r + \dim \ker f^{q-1}$ et $\ker f \subset \ker f^{q-1}$ (si $q > 1$).

Exercice 11 Soit $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-ev, on pose $e = (1, 1, ..., 1)$ et

$$H = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}.$$

Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}.e \oplus H$.

Exercice 13 Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(1)$ est une forme linéaire surjective.
   On pose $H = \ker(\varphi)$.
2. Détérminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et montrer que leur ensemble est un sous espace vectoriel de E, on le notera D.
3. Montrer que $E = H \oplus D$.

Problème

Dans tout le problème E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel .
Id_E désigne l'identité de E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ ou simplement 0 l'application nulle de E dans E .
Si $g \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E , on dira que F est **stable** par g si $g(F) \subset F$. On appelle **commutant** de g l'ensemble:

$$\mathcal{C}(g) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \ .$$

1 . Montrer que $\mathcal{C}(g)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Partie I

Dans cette partie et la suivante $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - 2y - z, 2y, y + 2z) \ . \end{aligned}$$

2 . Montrer que l'application f est linéaire.

3 . Déterminer une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle on a:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 \\ f(u_2) &= 2u_2 \\ f(u_3) &= u_2 + 2u_3 \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie on note

$$E_1 = vect\,(u_1) \quad \text{et} \quad E_2 = vect\,(u_2, u_3) \ .$$

Même si vous n'arrivez pas à déterminer la base $\mathcal{B}$ vous pouvez tout de même répondre aux questions suivantes .

4 . Montrer que $f(E_1) = E_1, f(E_2) = E_2$ et que $E = E_1 \oplus E_2$.

5 . Montrer que $E_1 = \ker\,(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker\left[(f - 2Id_E)^2\right]$.

6 . Déduire des deux questions précédentes que

$$(f - Id_E) \circ (f - 2Id_E)^2 = (f - 2Id_E)^2 \circ (f - Id_E) = 0 \ . \qquad (1)$$

Partie II

Dans cette partie, on se propose de déterminer le commutant $\mathcal{C}\,(f)$ de f .

7 . Déterminer deux polynômes P et Q tels que:

$$(X-1)\,P(X) + (X-2)^2\,Q(X) = 1 \ \text{ avec } \ \deg(P) < 2 \ \text{ et } \ \deg(Q) < 1.$$

Pour la suite de cette partie, on note p_1 la projection sur E_1 parallélement à E_2 et p_2 la projection sur E_2 parallélement à E_1 .

8 . Montrer que $p_1 + p_2 = Id_E$ et que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

9 . Montrer que $p_1 = (f - 2Id_E)^2 \circ Q(f)$ et $p_2 = (f - Id_E) \circ P(f)$.

10 . On note $d = p_1 + 2p_2 = Id_E + p_2$. En calculant $d\,(u_1)$, $d\,(u_2)$ et $d\,(u_3)$, montrer que d est bijective et déterminer d^{-1} .

11 . Soit $g = f - d$. Calculer $g^2\,(u_1)$, $g^2\,(u_2)$ et $g^2\,(u_3)$ et déduire g^2.

12 . Dans cette question, on veut montrer que

$$\mathcal{C}\,(f) = \mathcal{C}\,(g) \cap \mathcal{C}\,(d) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{C}\,(g) \cap \mathcal{C}\,(d) \subset \mathcal{C}\,(f)$.
2. Soit $h \in \mathcal{C}\,(f)$.
   (a) Montrer que E_1 et E_2 sont stables par h .
   (b) Montrer alors que h commute avec p_1 et avec p_2 .
   (c) En déduire que $h \in \mathcal{C}\,(d)$ et que $h \in \mathcal{C}\,(g)$.
3. Conclure.