# Travaux Dirigés de Mathématiques – Feuille 13 –





**Exercice 1** Soit $(G, .)$ un groupe, $e$ son élément neutre; on suppose que:

$$\forall x \in G : x^2 = e.$$

Montrer que $G$ est abélien.

**Exercice 2** Soient $A$ et $B$ deux sous groupes d'un groupe $G$.

1. Montrer que $A \cup B$ est un sous groupe de $G$ ssi $A \subset B$ ou $B \subset A$.
2. On note $AB$ l'ensemble $\{ab \mid (a,b) \in A \times B\} \subset G$, montrer que $AB$ est un sous groupe de $G$ ssi $AB = BA$.

**Exercice 3** Soit $H$ une partie stable et *finie* d'un groupe $G$. Montrer que $H$ est un sous groupe de $G$.

**Exercice 4** Soit $A$ un anneau et $U$ son groupe des unités. Montrer que:

$$\forall (x,y) \in A^2 : (1 - xy \in U \Longleftrightarrow 1 - yx \in U).$$

**Exercice 5** Soit $A$ un anneau et $(a,b) \in A^2$ tel que $ab$ soit inversible et que $ba$ ne soit pas un diviseur de *zéro*. Montrer que $a$ et $b$ sont inversibles.

**Exercice 6** Soit $A$ un anneau, un élément $a$ de $A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$tel que $a^n = 0$. Montrer que si $a$ est nilpotent alors $1 - a$ est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 7** Soient $A$ un anneau commutatif, $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_p) \in A^p$. Etablir la formule dite du *multinôme de Newton*:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum_{\substack{(k_1,..,k_p) \in \mathbb{N}^p \\ k_1 + .. + k_p = n}} \frac{n!}{k_1!..k_p!} x_1^{k_1} ... x_p^{k_p}.$$

**Exercice 8** On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} / (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est sous corps de $\mathbb{R}$.

**Exercice 9** Montrer que tout anneau commutatif intègre *fini* est un corps.

**Exercice 10** Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

**Exercice 11** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $2^k + 1$ est premier alors $k$ est une puissance de 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Montrer que si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.

**Exercice 12** Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de $n$ par 4 est différent de 3.

**Exercice 13** Soient $a, b$, et $c$ des entiers relatifs tels que $(a,b) \neq (0,0)$, montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution $(x,y)$ en entiers relatifs $x$ et $y$, il faut et il sufit que le *pgcd* de $a$ et $b$ divise $c$.
Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes:

$$7x - 9y = 1; \qquad 7x - 9y = 6; \qquad 11x + 17y = 5; \qquad 11x + 56y = 12.$$

**Exercice 14** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis , $f : E \longrightarrow F$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\text{Card}\big(f^{-1}(\{b\})\big) = p$ pour tout $b \in F$.
Montrer que $\text{Card}(E) = p.\text{Card}(F)$.

**Exercice 15** Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à $p$ éléments. Quel est le nombre de parties de $E$ qui contiennent un et un seul élément de $A$ ?

**Exercice 16** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer :

1. Les partitions de $E$ en deux parties .
2. Les couples $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$ .

**Exercice 17** Soit $n$ un entier naturel non nul , combien y'a t-il de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ ?

**Exercice 18** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$, $a \in E$ et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E); X \mapsto X \cup \{a\}$ si $a \notin X$ et $X \mapsto X - \{a\}$ si $a \in X$.

1. Montrer que $f$ est une bijection.
2. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal impair. Montrer que $\text{Card}(\mathcal{P}_0(E)) = \text{Card}(\mathcal{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.