

Exercice 1 Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On note:

$$A + B = \{x = a + b \mid (a, b) \in A \times B\} \text{ et } AB = \{x = ab \mid (a, b) \in A \times B\}$$

1. Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
2. Si de plus A et B sont inclus dans \mathbb{R}_+ , montrer que:

$$\sup(AB) = \sup A \sup B.$$

Exercice 2 Soit A une partie bornée non vide de \mathbb{R} .

Montrer que : $\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$.

Exercice 3 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q},]0, 1[\cap \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \left\{ \frac{n-1/n}{n+1/n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 4 Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I .

Exercice 5 Soit $E = \left\{ \frac{1}{n} \cos n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$; calculer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 6 Soit $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille non vide et bornée de réels; comparer:

$$\inf_i (\sup_j a_{ij}) \text{ avec } \sup_j (\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 7 Soit A une partie majorée de \mathbb{R} d'au moins deux éléments et x un élément de A .

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 8 On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

1. Montrer que $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : E(x + n) = E(x) + n$.
2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
3. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

5. Montrer:

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

Exercice 9 Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose $\lim u_n = +\infty$, montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.
2. On suppose (u_n) convergente, montrer que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément ou un plus grand élément.

Exercice 10 Soit (u_n) une suite réelle non majorée; montrer qu'elle admet une sous suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 11 Soit (u_n) une suite réelle telle que les trois sous suite (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Est ce qu'on a la même conclusion si on suppose seulement la convergence des deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ?

Exercice 12 Etant donné un réel x , on pose : $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$, $n \geq 1$. Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 13 Soit (u_n) une suite bornée telle que : $\forall n \in \mathbb{N} : 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.