

**Exercice 1****Exercice 2** Etudier la nature des séries:

$$\sum \frac{3^n}{4^n + 1} \quad \sum \frac{\ln(n)}{n^2} \quad \sum \frac{n^3}{n!} \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$$

$$\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \quad \sum \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n} \quad \sum \left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

**Exercice 3** Même question avec les séries de terme général

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \sum \frac{x^n}{1 + y^{2n}}; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\sum \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 2}) \quad \sum \left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)^{-n}.$$

**Exercice 4** Même question avec les séries de terme général

$$u_n = \int_n^{2n} \frac{1}{1+t\sqrt{t}} dt \quad v_n = \frac{1}{1 + \sqrt[2]{2} + \dots + \sqrt[n]{n}} \quad w_n = \frac{v_n}{n}$$

**Exercice 5** On définit la suite  $(x_n)$  par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}} \end{cases}$$

et on pose  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - x_n$ .Étudier la suite  $(x_n)$  et déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ .**Exercice 6** Quel est le domaine de définition de la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}?$$

**Exercice 7** Pour  $n \geq 0$   $a_n = \frac{(-1)^n}{4n+1}$ Ecrire  $a_n$ , puis  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , sous forme d'une intégrale simple. En déduire que

$$\sum a_n \text{ a pour somme } \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt.$$

Calculer cette somme.

**Exercice 8** Soit  $\sum a_n$  une série de  $\mathbb{R}^{+*}$  divergente et  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles. On note  $u_n = \frac{a_n}{S_n}$  et  $v_n = \frac{a_n}{S_n^2}$ .Etudier la nature des séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .**Exercice 9** On définit  $f$  par  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .Trouver le domaine de définition de  $f$ . Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$ . Calculer  $f(1)$ .**Exercice 10** La suite  $(u_n)$  est définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan(u_n). \end{cases}$$

On pose  $v_n = 2^n u_n$ .1. Calculer  $\lim u_n$ 2. Montrer  $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)$ .3. Donner un équivalent simple de  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{4}{u_n^2}$  puis de  $\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2}$ 4. Montrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\lambda > 0$  et que

$$u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{\lambda^3}{9 \times 2^{3n-2}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right).$$

**Exercice 11** Etudier la nature de la série de terme général  $\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^\alpha x^n$ .Calculer la somme dans le cas  $\alpha = 1$ .**Exercice 12** Etudier le produit des séries  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  dans les cas suivants

$$x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

**Exercice 13** Déterminer les rayons de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  si

$$a_n = n \quad a_n = \ln(n) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n!}$$

## Règle de Raabe-Duhamel

### Partie A :

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel  $\lambda$  vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1 . Prouver que si  $\lambda < 0$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge.

2 . Soit  $\beta$  un réel quelconque et  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ . Montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où  $\mu$  est un réel, indépendant de  $n$ , à déterminer.

3 . On suppose que  $\lambda > 1$ . On se propose de démontrer que la série  $\sum u_n$  converge. On choisit  $\beta$  tel que  $\lambda > \beta > 1$ .

1. Justifier l'existence d'un entier naturel  $N$  tel que,

$$\forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. En déduire que  $u_n = O(v_n)$  puis que la série  $\sum u_n$  converge.

4 . On suppose que  $0 \leq \lambda < 1$ . Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série  $\sum u_n$  diverge.

5 . Pour  $n \geq 2$ , on pose  $x_n = \frac{1}{n}$  et  $y_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ . Déterminer la nature des séries  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  et en déduire que le cas  $\lambda = 1$  est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

### Partie B. Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

6 . Pour  $n \geq 2$ , on pose

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Déterminer la nature de la série  $\sum w_n$ .

7 . Pour  $n \geq 1$ , on considère l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$ .

1. Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note  $I_n$  sa valeur.

2. Etablir que  $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$ .

3. En déduire la nature de la série  $\sum I_n$ .

8 . Soit  $\alpha$  un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 ; \forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} ; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$ , et pour  $x \in ]-R, R[$ , la valeur de  $S(x)$ .

2. Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série  $\sum a_n$  est absolument convergente si et seulement si  $\alpha > 0$ .

3. Montrer que si  $\alpha > 0$ ,  $S$  est continue sur  $[-R, R]$  et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

4. Montrer que si  $\alpha < -1$ , la série  $\sum a_n$  diverge.

5. On suppose que  $-1 < \alpha < 0$ .

(a) Prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$ .

(b) Montrer que la série  $\sum a_n$  converge.

(c) Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .