

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, étudier la courbe donnée par sa paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \sin t + \frac{1}{2} \cos 2t \\ y(t) = \cos t + \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases} \quad \text{en cartésien,}$$

$$r = \sin 2\theta \quad r = 1 - \cos \theta \quad r = 1 + \tan \theta. \quad \text{en polaire.}$$

Exercice 2 En utilisant les coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.

Exercice 3 Calculer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$ pour $0 \leq x \leq 3$.

Exercice 4 Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$ en fonction de ρ .

Exercice 5 On considère la courbe Γ du plan définie par la représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser les dans un même tableau.
2. Déterminer les points stationnaires de Γ ainsi que leurs natures.
3. Etudier les branches infinies de Γ et sa position par rapport à la droite Δ d'équation:

$$y = x - \ln(2)$$

Etudier l'intersection éventuelle de Γ et Δ .

4. Tracer la courbe Γ et ses asymptotes dans le repère \mathcal{R} (*unité = 1cm*).

Exercice 6 Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.

3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM) . Déterminer \overrightarrow{MH} .

4. En déduire une construction géométrique de la *développé* (lieu des centres de courbure) de Γ .

Exercice 7 Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé (pour éliminer le terme en xy on cherchera α de sorte que le changement de repère $x = \cos \alpha.X - \sin \alpha.Y$ et $y = \sin \alpha.X + \cos \alpha.Y$ ramène l'équation à une forme sans le terme XY):

$$\begin{aligned} mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 &= 0 (m \in \mathbb{R}). & x^2 + xy + y^2 &= 1. \\ 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y &= 0. & xy + 3x + 5y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 8 Déterminer nature et éléments des courbes données par

$$(i) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t + 1} \\ y = \frac{1}{t^2 + t + 1} \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.$$

Devoir Libre n°: 8

à rendre le 07 Mars

Exercice 9 Soit \mathcal{P} la parabole ($y^2 = x$). Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la *développé* de \mathcal{P} . Tracer Γ .

Exercice 10 Soit F un point, \mathcal{D} une droite ne passant pas par F , et $a > \frac{1}{2}d(F, \mathcal{D})$. Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M, \mathcal{D}) = 2a$.

Exercice 11 Soit Γ la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de x et y et dresser les dans un même tableau.
2. Déterminer l'équation de l'asymptote à Γ ($t \rightarrow -1$) et donner leurs positions relatives.

3. Pour $|t|$ assez grand, on pose

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \text{ où } \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

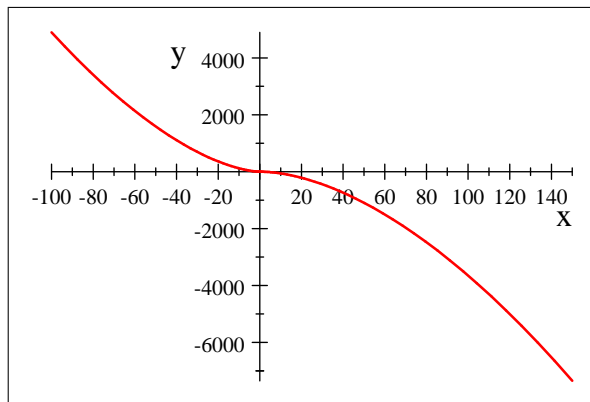
Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{\tau}(t) = \vec{j}$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{\tau}(t) = -\vec{j}$, et en déduire les demi-tangentes à l'origine respectivement lorsque t tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

4. Construire la courbe Γ dans le repère \mathcal{R} (unité 2cm).

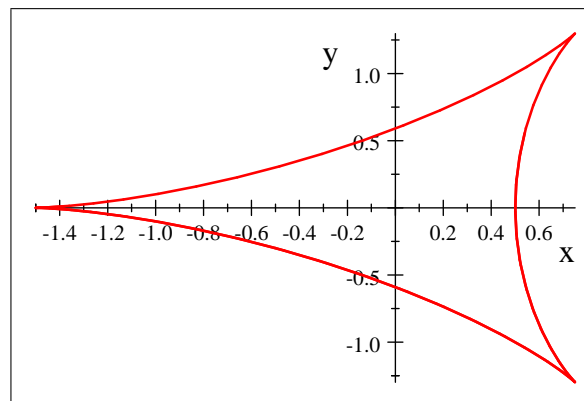
5. Soit D une droite d'équation: $ax + by + c = 0$.

(a) Montrer que l'équation, en t , $ax(t) + by(t) + c = 0$, possède au plus trois racines.

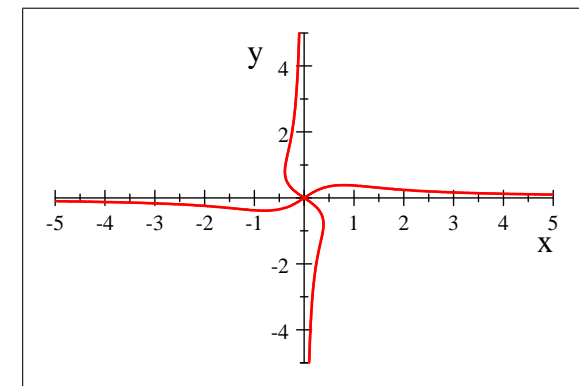
(b) En déduire que D coupe Γ en au plus 3 points.



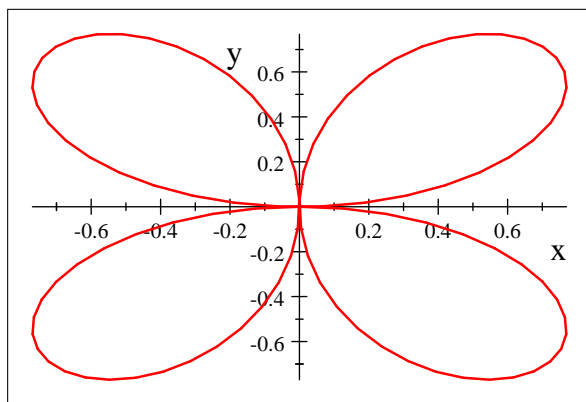
$$x = t^2 + t^3; y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5$$



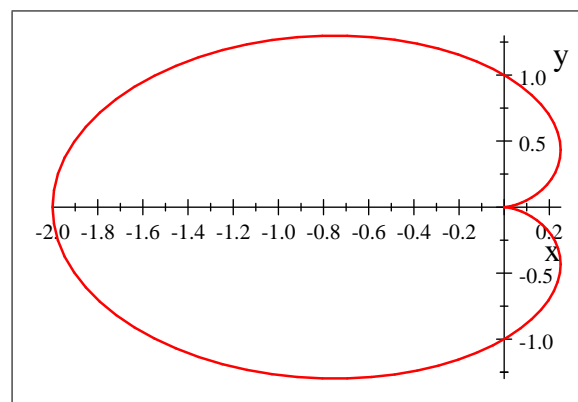
$$x = \sin t + 1/2 \cos 2t, y = \cos t + 1/2 \sin 2t$$



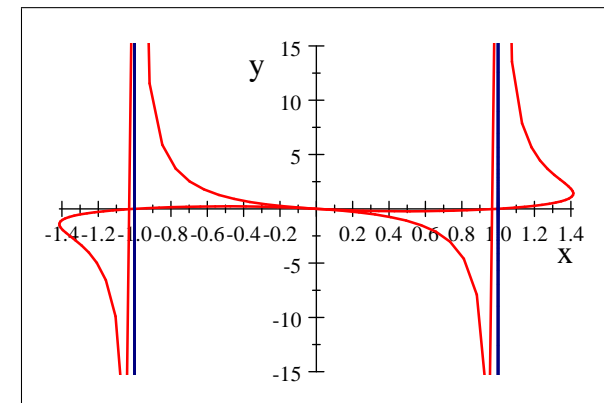
$$2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$



$$r = \sin 2\theta$$



$$r = 1 - \cos \theta$$



$$r = 1 + \tan \theta$$