Dans toute la suite, on considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, étudier la courbe donnée par sa paramétrisation dans le repère $\mathcal{R}$, puis la représenter graphiquement:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = \sin t + \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y(t) = \cos t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$$

Exercice 2 Même question que Exercice 1, avec les courbes données en polaire par:

$$r = \sin 2\theta \qquad r = 1 - \cos\theta \qquad r = 1 + \tan\theta.$$

Exercice 3 En utilisant les coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par:

$$2xy\left(x^2 + y^2\right) = x^2 - y^2.$$

Exercice 4 Calculer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x}(1 - \dfrac{x}{3})$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Exercice 5 Calculer le rayon de courbure de $\rho(\theta) = \cos(\dfrac{\theta}{3})$ en fonction de ρ.

Exercice 6 On considère la courbe Γ du plan définie par la représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2 + t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser les dans un même tableau.
2. Déterminer les points stationnaires de Γ ainsi que leurs natures.
3. Etudier les branches infinies de Γ et sa position par rapport à la droite Δ d'équation:
$$y = x - \ln(2)$$
   Etudier l'intersection éventuelle de Γ et Δ.
4. Tracer la courbe Γ et ses asymptotes dans le repère $\mathcal{R}$ ($unité = 1cm$).

Exercice 7 Soit Γ la courbe paramétrée définie, dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$du plan affine Euclidien, par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1 + t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de x et y et dresser les dans un même tableau.
2. Déterminer l'équation de l'asymptote à Γ ($t \longrightarrow -1$) et donner leurs positions relatives.
3. Pour $|t|$ assez grand, on pose
$$\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} \quad \text{où } \overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$$
   Montrer que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \overrightarrow{\tau}(t) = \overrightarrow{j}$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} \overrightarrow{\tau}(t) = -\overrightarrow{j}$, et en déduire les demi-tangentes à l'origine respectivement lorsque t tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
4. Construire la courbe Γ dans le repère $\mathcal{R}$ (unité $2cm$).
5. Soit D une droite d'équation: $ax + by + c = 0$.
   (a) Montrer que l'équation, en t, $ax(t) + by(t) + c = 0$, possède au plus trois racines.
   (b) En déduire que D coupe Γ en au plus 3 points.

Exercice 8 Soit $\mathcal{P}$ la parabole $\left(y^2 = x\right)$. Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de Γ la ***développé*** (lieu des centres de courbure) de $\mathcal{P}$. Tracer Γ.

Exercice 9 Soit Γ la courbe $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.
3. Soient I le centre de courbure en M et H le projeté orthogonal de I sur (OM). Déterminer $\overrightarrow{MH}$.
4. En déduire une construction géométrique de la ***développé*** de Γ.