

**Exercice 1** Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels tels que  $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq \frac{1}{6}$ . Montrer que  $(2x + 2y + z)^2 \leq 1$ .

**Exercice 2** Montrer que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

Etudier le cas d'égalité.

**Exercice 3** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = n$$

Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket : x_i = 1$ .

**Exercice 4** L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  étant muni de sa structure euclidienne canonique. Vérifier que les vecteurs  $e_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0, 2)$  et  $e_3 = (1, -1, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

**Exercice 5** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, soit  $P$  le plan d'équation  $x + y + z = 0$ . Déterminer une base orthonormale de  $P$ , puis la compléter en base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 6** Dans  $\mathbb{R}^4$  Euclidien canonique, on considère le plan  $H$  d'équation cartésienne relativement à la base canonique:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Déterminer des bases orthorthonormales de  $H$  et  $H^\perp$ .
- Pour  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  déterminer le couple  $(u, v) \in H \times H^\perp$  tel que  $x = u + v$ .

**Exercice 7** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

et en déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

**Exercice 8** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $\vec{u}$  un vecteur non nul. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que:

$$1) \vec{u} \cdot \overrightarrow{BM} = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}. \quad 2) \text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = -\text{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}).$$

**Exercice 9** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points non alignés de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et  $k \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que:

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = k.$$

### Perpendiculaire commune à deux droites de l'espace

**Exercice 10** On se donne 2 droites  $D_1$  et  $D_2$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  non parallèles ayant comme vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ , on note  $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

- Montrer que le plan  $P_1$  contenant  $D_1$  et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur directeur et le plan  $P_2$  contenant  $D_2$  et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur directeur se coupent en une droite  $\Delta$ .
- Montrer que  $\Delta$  est une perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$  (c'est à dire  $\Delta$  coupe  $D_1$  et  $D_2$ , et est orthogonale à  $D_1$  et à  $D_2$ ).
- Montrer que  $\Delta$  est la seule perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$ .
- Comment construire  $\Delta$  dans le cas où  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles ?  
Soit  $H_1 = D_1 \cap \Delta$  et  $H_2 = D_2 \cap \Delta$ .
- Montrer que pour tout  $A_1 \in D_1$  et tout  $A_2 \in D_2$ , on a

$$d(A_1, A_2) \geq d(H_1, H_2).$$

$d(H_1, H_2)$  est appelée *distance entre les deux droites  $D_1$  et  $D_2$* .

Donner des équations cartésiennes pour  $\Delta$  et calculer la distance entre les deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dans le cas suivant :

$$(D_1) : \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} -x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

**Exercice 11** Soient deux droites  $D$  et  $D'$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  passant respectivement par les points  $A = (1, 2, 3)$  et  $A' = (0, 4, -1)$  et dirigées par les vecteurs  $\vec{u} = (4, 2, -1)$  et  $\vec{u}' = (1, 1, 0)$ .

- Calculer  $d(D, D')$ .
- Déterminer un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$ .

## Théorème de l'arc capable

Par définition l'angle orienté de deux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  non nuls est tout réel  $\theta$  tel que

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\text{Det}(\vec{AB}, \vec{AC})}{AB \cdot AC}$$

ce réel étant défini modulo  $2\pi$  et on le note  $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$ . L'égalité entre angles orientés sera donc au sens de congruence modulo  $2\pi$ .

Dans ce problème, on se propose de montrer des propriétés sur les angles orientés en utilisant la définition ci-dessus et la relation de Chasles,

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{AC}, \vec{AD})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AD})}$$

et sans se référer aux figures géométriques. Tous les angles considérés sont orientés.

1. Montrer que

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = -\widehat{(\vec{AC}, \vec{AB})} \quad \text{et} \quad \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{(\vec{BA}, \vec{AC})} + \pi.$$

2. Montrer la relation suivantes entre les angles d'un triangle  $ABC$

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \pi.$$

et que si  $ABC$  est isocèle en  $A$  alors  $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})}$ .

3. Soient  $M, A$  et  $B$  trois points distincts d'un cercle de centre  $\Omega$ . Montrer en utilisant les deux questions précédente et la relation de Chasles, la formule

$$\widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} = 2 \widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})}$$

Dans la suite on propose une démonstration du **théorème de l'arc capable**. Soit un réel  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\mathcal{C}_\alpha$  l'ensemble

$$\mathcal{C}_\alpha(A, B) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \alpha \right\}.$$

On note  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

4. Montrer que les relations:

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} = 2\alpha \\ \Omega A = \Omega B \end{cases}$$

définissent le point  $\Omega$  de manière unique. On montrera que

$$\Omega A = \Omega B = \frac{AB}{2|\sin \alpha|} \quad \text{et} \quad \widehat{(\vec{IB}, \vec{I\Omega})} = \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha \in ]0, \pi[ \quad \text{et} \quad \widehat{(\vec{IB}, \vec{I\Omega})} = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha \in ]-\pi, 0[.$$

5. Soit  $M \in \mathcal{C}_\alpha(A, B)$ , on considère le cercle  $\mathcal{C}'$  défini par les trois points non alignés  $M, A$  et  $B$ , en notant  $\Omega'$  le centre de  $\mathcal{C}'$ , remarquer que  $\widehat{(\vec{\Omega' A}, \vec{\Omega' B})} = 2\alpha$  puis en déduire que  $\Omega' = \Omega$  et que  $\mathcal{C}'$  est le cercle

de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = \frac{AB}{2|\sin \alpha|}$ .

6. Montrer que  $\text{Det}(\vec{AB}, \vec{AM}) = \text{Det}(\vec{MA}, \vec{MB})$  et que la position de  $M$  par rapport à la droite  $(AB)$  dépend de la valeur de  $\alpha$ .

7. Conclure que  $\mathcal{C}_\alpha(A, B)$  est un arc de cercle limité par  $A$  et  $B$  et faire deux figures correspondant aux cas  $\alpha \in ]0, \pi[$  et  $\alpha \in ]-\pi, 0[$ .

8. Montrer que  $\mathcal{C}_\alpha(A, B) \cup \mathcal{C}_{\alpha+\pi}(A, B)$  est le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, R)$  privé des deux points  $A$  et  $B$ .