Exercice 1 Prouver par récurrence sur n les formules

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2 Même question avec la formule

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + +(n-1) \times n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

Dans toute la suite E, F... désignent des ensembles non vides.

Exercice 3 Soient A, B et C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 4 On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans E.

1. Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un monoïde (unitaire).
2. Quels sont les éléments symétrisables? Simplifiables à gauche (resp à droite)?

Exercice 5 Soient $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application

$$h : E \to F \times G, \quad x \to (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives; h est elle surjective?

Exercice 6 Sur $\mathbb{R}$ on considère la l.c.i $*$ définie par,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right).$$

1. Montrer que $*$ est commutative et non associative.
2. Déterminer l'élément neutre de $*$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:

$$(1) \quad 2 * x = 5 \qquad (2) \quad x * x = 1$$

Exercice 7 Sur $\mathbb{R}$ on considère la l.c.i $*$ définie par,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = xy - 3x - 3y + 12.$$

1. Déterminer l'élément neutre e de $*$.
2. Déterminer les éléments symétrisables de $(\mathbb{R}, *)$.
3. Montrer que $]3, +\infty[$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, *)$.
4. Soit x dans $]3, +\infty[$ et x' son symétrique dans $(\mathbb{R}, *)$, est ce que x' appartient à $]3, +\infty[$?

Exercice 8 Soit G un ensemble non vide muni d'une l.c.i $*$ associative d'élément neutre e. On suppose que

$$\forall x \in G : x * x = e.$$

Montrer que $*$ est commutative.

Exercice 9 Ici $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par:

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(a', b') \iff a + b' = a' + b.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier l'ensemble quotient.

Exercice 10 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total?

Exercice 11 Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie?