Dans toute la suite E, F... désignent des ensembles non vides.

Exercice 1 Montrer que pour tout entier n : $2^n \geqslant n$.

Exercice 2 Prouver par récurrence sur n les formules

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3 Même question avec la formule

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n-1) \times n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1).$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme plus simple de l'expression :

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! \ .$$

Exercice 5 Soient A, B et C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 6 On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans E.

1. Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un monoïde (unitaire).
2. Quels sont les éléments symétrisables? Simplifiables à gauche (resp à droite)?

Exercice 7 Soient $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère l'application

$$h : E \to F \times G, \quad x \to (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives; h est elle surjective?

Exercice 8 L'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = (x, xy - y^3)$$

est-elle injective, surjective ?

Exercice 9 Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
4. si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 10 Sur $\mathbb{R}$ on considère la l.c.i $*$ définie par,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right).$$

1. Montrer que $*$ est commutative et non associative.
2. Déterminer l'élément neutre de $*$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:

$$(1) \quad 2 * x = 5 \qquad (2) \quad x * x = 1$$

Exercice 11 Sur $\mathbb{R}$ on considère la l.c.i $*$ définie par,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = xy - 3x - 3y + 12.$$

1. Déterminer l'élément neutre e de $*$.
2. Déterminer les éléments symétrisables de $(\mathbb{R}, *)$.
3. Montrer que $]3, +\infty[$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, *)$.
4. Soit x dans $]3, +\infty[$ et x' son symétrique dans $(\mathbb{R}, *)$, est ce que x' appartient à $]3, +\infty[$?

Exercice 12 Soit G un ensemble non vide muni d'une l.c.i $*$ associative d'élément neutre e. On suppose que

$$\forall x \in G : x * x = e.$$

Montrer que $*$ est commutative.

Exercice 13 Ici $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par:

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b') \iff a+b' = a'+b.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier l'ensemble quotient.

Exercice 14 La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total?

Exercice 15 Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie?

Devoir Libre n°: 1

à rendre le 25 Septembre

Exercice 16 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 : f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 17 Trouver toutes les applications g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 : g(m+n) = g(n)g(m).$$

Exercice 18 Trouver toutes les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leqslant n.$$

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f(n+1) > f\left(f(n)\right).$$

1. Justifier l'existence d'un entier $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $f(k_0) = \min\{f(m) \mid m > 0\}$.
2. Montrer que $k_0 = 1$ et en déduire que $\forall m > 1 : f(m) > f(1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\forall m > n : f(m) > f(n)$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $k_n > n$, tel que $f(k_n) = \min\{f(m) \mid m > n\}$.
   (b) Montrer que $k_n = n+1$ et en déduire que $\forall m > n+1 : f(m) > f(n+1)$.
4. Conclure que f est strictement croissante.
5. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(n) \geqslant n$.
6. En déduire que $f = Id_{\mathbb{N}^*}$.