Exercices sur Maple posés
à la banque PT

Les exercices ci-dessous ont été rapportés par des candidats à leurs professeurs. Les plus expresses réserves sont émises sur leur exactitude ! Mais ils sont cependant fournis au public, dans l'espoir que leur publication sera utile.

Concours 1997-1998

1

À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+\frac{1}{a} & a^2+\frac{1}{a^2} \\ a+\frac{1}{a} & 1 & a+\frac{1}{a} \\ a^2+\frac{1}{a^2} & a+\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable ?
b) Quand A est diagonalisable, trouver P matrice de passage telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (vérifier).

3

(sous toutes réserves)
Soit :

$$A = \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & \frac{-1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable ?
b) Trouver u, v, w pour que A soit orthogonale.

4

Déterminer les coefficients a, b, c, d et e pour que la fonction f :

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{sh}(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

soit un infiniment petit d'ordre le plus élévé possible au voisinage de 0. Donner alors un équivalent de f.

5

(sous toutes réserves)
Montrer l'existence d'un minimum et le calculer pour la fonction :

$$(a, b) \mapsto \int_1^{+\infty} \left(a\frac{\ln(t)}{t} + \frac{b}{t}\right)^2 dt$$

6

Soient une sphère de centre O, de rayon 1 et un cylindre de centre $\Omega(0, \frac{1}{2}, 0)$, de rayon $\frac{1}{2}$. Γ est l'intersection de la shère et du cylindre.
a) Paramètrer Γ.
b) Tracer Γ (penser à `plots[spacecurve]`).
c) Longueur de Γ.

7

a) Tracer la courbe :
$x = t^2 + 4t$
$y = 2t^2 - 3$
b) Calculer l'angle des tangentes au point double.

8

(sous toutes réserves)
Déterminer les zéros du polynome :

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$$

9

Extremums de la fonction :

$$(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$$

10

$u_0 = 1$, $v_0 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
a) Valeur approchée de la limite commune l ?
b) Deuxième question illisible `:-(`
Mais ne serait-ce pas le calcul approché de :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + 2\sin^2 t}}\, dt$$

et comparaison avec $\frac{\pi}{2l}$?
(Gauss, adolescent)

11

Soit $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$T_0 = 1, T_1 = X$$

et

$$\forall n \geq 2 : \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

Ecrire une procédure permettant de calculer T_{11}.

12

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver une base orthonormée dans laquelle elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

13

Soit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_4[X]$.

14

Soit l'équation différentielle

$$x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$$

Donner les solutions ; existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'il existe un point A tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourantes en ce point.

15

Sachant que

$$\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$$

utiliser un DSE de la fonction arcsin permettant d'obtenir un nombre donné de décimales exactes de π.

16

a) Montrer que

$$f : z \mapsto \frac{z-2i}{z+i}$$

est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
b) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$. Exprimer x et y en fonction de u et v et inversement.
c)

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C}; \Im(z) > \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

Démontrer que la restriction de f à P est une bijection de P sur D.

17

On pose :

$$r^2 = r + 1, a = r, b = r - 1$$

et

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ a & -1 & -b \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

Quelle est la nature de la transformation géométrique associée à A?

18

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer a, b, c, d, e et f pour que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres.

19

Déterminer les zéros de

$$P = X^4 - X^2 - 2X^3 - 2X - 1$$

Décomposer P en facteurs irréductibles.

20

Réduire dans une base orthonormale la forme quadratique :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2xz + 2yz$$

21

$$P(X) = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$$

Donner les valeurs de a et b pour que $2 + 2i$ soit racine. Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Concours 1998-1999

22

(sans plus de précisions)
Intégration d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre (dessin des courbes intégrales, dessin d'une courbe intégrale avec conditions initiales).

23

Soit f la fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui à z associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

a) Donner l'image par f du cercle de centre O et de rayon R.
b) Donner l'image par f de la demi-droite partant de O et d'angle polaire θ.

24

Enveloppe de la famille de droites :

$$\sin(t)x - \cos^2(t)y + \sin^2(t) = 0$$

Points stationnaires de l'enveloppe.

25

Résoudre approximativement, par la méthode d'EULER, l'équation différentielle sur $[0, 1]$:

$$y'' + 3y' + 2y = e^t$$

Donner les valeurs de y pour les pas $h = 0,1$ et $h = 0,05$.

26

(sans plus de précisions)
Décrire la conique passant par les cinq points A, B, C, D, E (les coordonnées étaient évidemment données numériquement).

27

Étudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12x - 12y$$

28

Étude de la série :

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{\sqrt{n}} x^n$$

a) Rayon de convergence de S.

b) Donner une valeur de N pour que :

$$S_N(x) = \sum_{0\leq n\leq N} 2^{\sqrt{n}} x^n$$

soit une valeur approchée de $S(x)$ à 10^{-8} près pour tout $x \in [-1/3, 1/3]$.
c) Graphe de $x \mapsto S_N(x)$ pour $x \in [-1/3, 1/3]$.

29

Soit A la matrice carrée de dimension 5 telle que
$a_{ij} = 2$ si $i = j$,
$a_{ij} = 1$ si $i \neq j$.
Calculer A^n.

30

(sans plus de précisions)
Résoudre une équation différentielle du premier ordre ($(x+1)$ en facteur de y'). Tracer les courbes intégrales. Montrer qu'il existe une solution définie sur $\mathbb{R}$. Calculer la limite de la fonction solution quand x tend vers -1.

31

Soient A B des matrices à 3 lignes et 3 colonnes. On définit $[A, B] = AB - BA$. Montrer que :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

32

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\tan x} + \frac{cx}{\cos x} + \frac{d}{x}$$

avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$.
Trouver a, b, c et d tels que f soit prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement soit d'ordre le plus élevé possible. On vérifiera que l'ensemble solution est une droite vectorielle.

33

Soit f la fonction paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
a) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
b) Montrer que l'on peut choisir a, b et c pour que la série de Fourier de f soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Représenter alors le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
c) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

34

Trouver toutes les fonctions $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \phi\left(x^2 + y^2\right)$$

vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3y \frac{\partial f}{\partial x} = xyf(x, y)$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

35

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$ et $a \neq -b$.
a) Montrer que

$$\frac{1 + ab}{a + b}$$

est un réel.
b) Montrer que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b}$$

est un imaginaire pur.

36

Calculer le reste de la division euclidienne de :

$$x^n + 2x^m + 1$$

par

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

n et m étant deux entiers naturels.
Vérifier le résultat pour $n = 43$ et $m = 100$.
Question de cours : division euclidienne.

37

Soit :

$$P = x^4 + x^3 + \sqrt{2}x^2 + ax + b$$

ou bien

$$P = x^4 + x^3 + ax^2 + \sqrt{2}x + b$$

(l'élève ne sait plus).
a) Sachant que $1+i$ est zéro de P, déterminer les réels a et b. Calculer alors les zéros de P.
b) Factoriser P dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

38

Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s_1}{dt^2} - kw^2 s_2 = 0 \\ \dfrac{d^2 s_2}{dt^2} + kw^2 s_1 = 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la solution avec $k = 0,5$ et $w = 2$.

39

Trouver une condition sur a pour que

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

ait des valeurs propres strictement positives.
(*L'élève n'est plus très sûr de l' énoncé*).

40

Soit
$$u_n = \sin\left(\frac{a}{\sqrt{n+b}}\right) - \tan\left(\frac{c}{\sqrt{n+d}}\right)$$
Condition pour que la série de terme général u_n converge. Déterminer a, b, c, d pour que
$$u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$$
avec α le plus grand possible.

41

Soit la matrice carrée d'ordre 5 : $A = (a_{ij})$ définie par $a_{ii} = 2$ et $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$. Calculer A^n.

42

Résoudre
$$(1+x^2)y' - 2xy = x^3$$
pour que les courbes intégrales passent par le point $(0, n)$, où $0 \leq n \leq 5$.

43

Résoudre
$$xy' + (1-x)y = \frac{xe^x}{x^4+1}$$
Tracer quelques courbes intégrales. Solutions continues sur $\mathbb{R}$? (*Tombé deux fois !*)

44

Trouver tous les polynômes P tels que
$$(n^6 + 3n^2)^{1/6} - (P(n))^{1/3}$$
soit le terme général d'une série convergente.

45

Soit l'équation différentielle

$$xy'' + (x^4 - 1)y' + xy = x^3$$

avec

$$y(0) = 0$$

Résoudre, tracer quelques courbes, étudier asymptotes et points remarquables (*l'élève n'est plus très sûr de l'énoncé*).

46

Étudier les extrema locaux de

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$
