Oraux CCP

Planche 1 I) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$.

a) Montrer que $\phi(P)(X) = (X-a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2(P(X) - P(a))$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) A l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de ϕ.

c) Trouver ses éléments propres. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

II) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = x^2 + \mathrm{e}^x$.

I) a) La linéarité est immédiate et sans peine $\deg(\phi(P)) \leq n$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) On a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$, $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^{k-1}$ puis

$$\phi(P)(X) = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X-a)^k - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=3}^{n}(k-2)\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k - 2P'(a)(X-a).$$

$P \in \ker\phi \Leftrightarrow P'(a) = 0$ et $\forall 3 \leq k \leq n, P^{(k)}(a) = 0$. Ainsi $\ker\phi = \mathrm{Vect}(1,(X-a)^2)$.

$P \in \mathrm{Im}\phi \Leftrightarrow P(a) = P''(a) = 0$. $\mathrm{Im}\phi = (X-a)^3\mathbb{R}_{n-3}[X] + \mathrm{Vect}(X-a)$.

c) $\phi(P) = \lambda P \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda P(a) \\ -2P'(a) = \lambda P'(a) \\ (k-2)P^{(k)}(a) = \lambda P^{(k)}(a) \text{ pour } k \in \{2,\dots,n\} \end{cases}$.

Cette équation possède une solution non nulle ssi $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ pour $\lambda = k-2$ avec $k \in \{2,\dots,n\}$.

Ainsi $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-2, 0, 1, \dots, n-2\}$.

$E_{-2}(\phi) = \mathrm{Vect}(X-a)$, $E_0(\phi) = \ker\phi$, $E_{k-2}(\phi) = \mathrm{Vect}(X-a)^k$ pour $k \in \{3,\dots,n\}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim\mathbb{R}_n[X]$: l'endomorphisme est diagonalisable.

II) Solution générale $y(x) = x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$.

Planche 2 I) Soit u un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormale d'un espace euclidien E.
Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
(i) u est orthogonal, (ii) ${}^tAA = I_n$ et (iii) A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

II) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

I) (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) en vertu du théorème d'inversibilité des matrices carrées.
u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x,y \in E, (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.

Or $(u(x) \mid u(y)) = (u^*(u(x)) \mid y)$ donc u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x,y \in E, (u^*(u(x)) - x \mid y) = 0$.

Or seul le vecteur nul est orthogonal à tout autre donc u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x \in E, u^* \circ u(x) = x$.

Or ${}^tAA$ est la matrice de $u^* \circ u$ donc u est orthogonal ssi ${}^tAA = I_n$.

II) a) f est évidemment dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

b) f admet pour DL limité à l'ordre $n-1$: $f(x) = o(x^{n-1})$.

Si f admet un $DL_n(0)$ celui-ci serait de la forme $f(x) = ax^n + o(x^n)$ ce qui entraîne que $\sin(1/x)$ admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

Planche 3 I) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel E de dimension n. On note P la matrice de u, endomorphisme, dans $\mathcal{B}$.

Montrer que u est orthogonal $\Leftrightarrow {}^tPP=I_n \Leftrightarrow P$ est inversible et ${}^tP=P^{-1}$.

II) Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ décroissante et continue et telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

a) Montrer que f est positive et que f tend vers 0 en $+\infty$.

b) $\forall h>0$, montrer que $h\sum_{n=1}^{Nh} f(nh)\le \int_0^{Nh} f(x)\,\mathrm{d}x \le h\sum_{n=0}^{(N-1)h} f(nh)$.

c) Montrer que la série de terme général $f(nh)$ converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\sim \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $h\to 0^+$.

I) La dernière équivalence provient du théorème d'inversibilité des matrices carrées.

u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x,y\in E,(u(x)\mid u(y))=(x\mid y)$.

Or $(u(x)\mid u(y))=(u^*(u(x))\mid y)$ donc u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x,y\in E,(u^*(u(x))-x\mid y)=0$.

Or seul le vecteur nul est orthogonal à tout autre donc u est orthogonal $\Leftrightarrow \forall x\in E, u^*\circ u(x)=x$.

Or ${}^tPP$ est la matrice de $u^*\circ u$ donc u est orthogonal ssi ${}^tPP=I_n$.

II) a) f admet une limite en $+\infty$ car elle est décroissante. Cette limite ne peut être infinie ou finie non nulle donc f tend vers 0 en $+\infty$ et puisqu'elle est décroissante elle est positive.

b) f étant décroissante, $hf((n+1)h)\le \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t\le hf(nh)$. Il suffit de sommer pour $n\in\{0,\dots,N-1\}$.

c) $\sum_{n=1}^{Nh} f(nh)\le \frac{1}{h}\int_0^{Nh} f(x)\,\mathrm{d}x\le \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(nh)\ge 0$ donc $\sum f(nh)$ converge.

En passant à la limite quand $N\to+\infty$ l'encadrement du b) : $h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\le\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\le h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$

donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\le h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\le \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x+hf(0)$.

A la limite quand $h\to 0$: $h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\to\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Planche 4 I) Etudier la courbe d'équation polaire $\rho=2\sqrt{\cos(2\theta)}$.

II) Montrer que $f(x)=\arctan(1+x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

I) Classiquement une lemniscate de Bernoulli.

II) $f'(x)=\dfrac{1}{1+(1+x)^2}=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle donc f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1/2i}{x+1-i}-\frac{1/2i}{x+1+i}=\mathrm{Re}\left(\frac{-i}{x+1-i}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-i}\right).$$

$$\frac{1}{x+1-i}=\frac{1}{1-i}\frac{1}{1+\frac{x}{1-i}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}x^n$$ avec un rayon de convergence $R=\sqrt{2}$.

Comme $1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$ on a $\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}}x^n$ puis $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{(n+1)2^{(n+1)/2}}x^{n+1}$ avec $R=\sqrt{2}$.

Planche 5 I) Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $y'-\dfrac{x}{x^2-1}y=2x$.

II) Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ euclidien : $a\wedge(b\wedge c)=(a\mid c)b-(a\mid b)c$. (on pourra utiliser les

coordonnées de a,b,c dans une base où elles comportent un maximum de 0)
Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $f(x)=a\wedge(a\wedge x)$ où a est un vecteur unitaire puis reconnaître f.

I) Solution générale $y(x)=C\sqrt{x^2-1}+2(x^2-1)$.
II) Soit u un vecteur unitaire tel que $a\in\operatorname{Vect}u$ et v un vecteur unitaire orthogonal à v tel que $b\in\operatorname{Vect}(u,v)$.
Il suffit ensuite de travailler dans $(u,v,u\wedge v)$.
Soit $x\neq 0$.
$f(x)=\lambda x\Leftrightarrow(\lambda+1)x=(a\mid x)a$.
Si x est orthogonal à a alors x est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Sinon x est vecteur propre ssi x est colinéaire à a. Or $f(a)=0$ donc a, puis x, est vecteur propre associé à la valeur propre 0.
On reconnaît en f l'opposé de la projection orthogonale sur le plan de vecteur normal a.

Planche 6 I) Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $y'-\dfrac{x}{x^2-1}y=2x$.

II) Soit $(a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$.

a) Quel est le rang de $A\in M_n(\mathbb{C})$ définie par $A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&a_{n-1}\\a_1&\cdots&a_{n-1}&0\end{pmatrix}$?

b) Avec la trace, que peut-on dire des valeurs propres ?
c) A est-elle diagonalisable ?

I) Solution générale $y(x)=C\sqrt{x^2-1}+2(x^2-1)$.
II) a) $\operatorname{rg}(A)=0$ si $a_1=\ldots=a_{n-1}=0$ et $\operatorname{rg}(A)=2$ sinon.
b) La somme des valeurs propres est nulle.
c) En développant le déterminant selon la dernière colonne puis en développant les mineurs obtenus selon leur k ème colonne, on obtient $\chi_A=(-1)^nX^{n-2}(X^2-(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2))$.
Si $a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2\neq 0$ alors A admet deux valeurs propres opposées non nulles et 0 pour valeur propre d'espace propre de dimension $n-2$ donc A est diagonalisable.
Si $a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2=0$ alors 0 est la seule valeur propre de A et A est diagonalisable ssi $A=0$ i.e. $a_1=\ldots=a_{n-1}=0$.

Planche 7 I) Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2+3n+1}{2^n}$.

II) Dessiner $\rho=a(1+\cos\theta)$.

I) On évalue $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n+1)x^n=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^3}$ en $x=\dfrac{1}{2}$. On obtient 14.
II) C'est une cardioïde.

Planche 8 I) Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $M=\begin{pmatrix}0&a&c\\b&0&c\\b&-a&0\end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?

II) Domaine de définition de $S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2-t^2}$.

Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de $f(x)=\cos(\alpha x)$ définie sur $[-\pi,\pi]$ avec $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Sur quel domaine f coïncide avec son développement en série de Fourier ?
En déduire une expression de $S(t)$.

I) $\chi_M = -X(X^2 - ab - bc + ca)$.
Si $ab + bc > ca$ alors M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et a fortiori dans $M_3(\mathbb{C})$.
Si $ab + bc = ca$ alors 0 est seule valeur propre de M et donc M est diagonalisable ssi $M = 0$.
Si $ab + bc < ca$ alors M n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ mais l'est dans $M_3(\mathbb{C})$.
II) $S(t)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$ et $b_n = 0$.

Par le théorème de Dirichlet, $f(x)$ coïncide avec $Sf(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ car f est égale à sa régularisée. Pour $x = \pi$, on obtient :

$\cos \alpha\pi = \dfrac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - \alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2} - \dfrac{\pi \cot \alpha\pi}{2\alpha}$ puis $S(t) = -\dfrac{1}{2\alpha^2} - \dfrac{\pi \cot \alpha\pi}{2\alpha}$.

Planche 9 I) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?

II) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Etudier les séries $\sum f(n)$ et $\sum f'(n)$.

I) $\chi_M = -X(X^2 - ab - bc + ca)$.
Si $ab + bc > ca$ alors M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et a fortiori dans $M_3(\mathbb{C})$.
Si $ab + bc = ca$ alors 0 est seule valeur propre de M et donc M est diagonalisable ssi $M = 0$.
Si $ab + bc < ca$ alors M n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ mais l'est dans $M_3(\mathbb{C})$.

II) a) $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.

Si $\ell > 0$ alors pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$ puis $f(x) \geq \ell x/2 + m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.

Posons $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par l'égalité de Taylor avec reste intégral : $F(x+1) = F(x) + f(x) + \dfrac{1}{2} f'(x) + \int_x^{x+1} \dfrac{(x+1-t)^2}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$.

Quand $x \to +\infty$, $F(x), F(x+1) \to \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $f'(x) \to 0$ et $\left| \int_x^{x+1} \dfrac{(x+1-t)^2}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \dfrac{1}{2} \int_x^{x+1} |f''(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$

donc $f(x) \to 0$.

b) $f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} ((n+1) - t) f''(t)\,\mathrm{d}t$ donne $f'(n) = f(n+1) - f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$.

La série de terme général $f(n+1) - f(n)$ est CV car f converge en $+\infty$.

La série de terme général $\int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$ est ACV car $\left| \int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_n^{n+1} |f''(t)|\,\mathrm{d}t$.

Par conséquent $\sum f'(n)$ est CV.

Aussi $F(n+1) = F(n) + f(n) + \dfrac{1}{2} f'(n) + \int_n^{n+1} \dfrac{(n+1-t)^2}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$ permet de mener le même raisonnement et conclure que $\sum f(n)$ CV.

Planche 10 I) Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $M=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ b & 0 & c\\ b & -a & 0\end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$?

II) a) Etudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t)=t-\ln t-\dfrac{1}{t}$.

b) Résoudre $f(t)=0$.

c) Trouver les extremums globaux et locaux de $g(x,y)=x\ln y-y\ln x$.

I) $\chi_M=-X(X^2-ab-bc+ca)$.
Si $ab+bc>ca$ alors M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et a fortiori dans $M_3(\mathbb{C})$.
Si $ab+bc=ca$ alors 0 est seule valeur propre de M et donc M est diagonalisable ssi $M=0$.
Si $ab+bc<ca$ alors M n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ mais l'est dans $M_3(\mathbb{C})$.
II) a) f est définie sur $]0,+\infty[$, strictement croissante, concave sur $]0,2]$ et convexe sur $[2,+\infty[$. Asymptote verticale en 0 et branche parabolique de direction $y=x$ en $+\infty$.
b) $t=1$ est seule solution.
c) g est de classe $\mathcal{C}^1$. Recherchons, ces points critiques :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln y-\dfrac{y}{x}=0\\ \dfrac{x}{y}-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(\dfrac{x}{y}\right)=0\\ \dfrac{x}{y}-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x=\mathrm{e}\end{cases}.$$

On conclut que (e,e) est le seul point critique.
Avec les notations de Monge : $r=1/\mathrm{e}$, $s=0$ et $t=-1/\mathrm{e}$. $rt-s^2<0$.
Le point critique (e,e) n'est pas extremum local.

Planche 11 I) Soit $A,B\in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $B=A^p$.
Montrer que A est diagonalisable ssi B l'est.
II) f 2π-périodique définie par $f(t)=t$ sur $]-\pi,\pi[$ et $f(-\pi)=0$. Former le développement en séries de Fourier de f.

I) Si A est diagonalisable il est immédiat que B l'est aussi.
Inversement, si B est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de B scindé à racines simple :
$\prod_{k=1}^{m}(X-\lambda_k)$.
Puisque $B=A^p$, le polynôme $\prod_{k=1}^{m}(X^p-\lambda_k)$ est annulateur de A, or ce dernier est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
II) f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.
f est impaire, $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\dfrac{(-1)^{n+1}2}{n}$ puis $f(t)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$.

Planche 12 I) Soit $B=\begin{pmatrix}A & A\\ 0 & A\end{pmatrix}$ où $A\in M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $P(B)=\begin{pmatrix}P(A) & AP'(A)\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}$.

b) Montrer que si B est diagonalisable, A l'est aussi et $A=0$.
c) En déduire une CNS pour que B soit diagonalisable.
II) a) Etudier, en redémontrer tous les résultats, $\sum z^n$ avec $z\in\mathbb{C}$.
b) Etudier la convergence simple de la série des fonctions $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$.

I) a) Par récurrence $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ puis on étend par linéarité.

b) Si B est diagonalisable alors B annule un polynôme scindé simple P et les calculs précédents montrent que A annule aussi ce polynôme. Par suite A est diagonalisable. De plus A annule aussi le polynôme XP' de sorte que si λ est valeur propre de A alors A est racine commune de P et de XP'. Or P n'a que des racines simples donc P et P' n'ont pas de racines communes d'où $\lambda = 0$. A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donne $A = 0$.

c) B est diagonalisable ssi $A = 0$.

II) a) Pour $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et pour $z = 1$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = n+1$. Par suite $\sum z^n$ CV ssi $|z| < 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

b) La série converge simplement ssi $x > 0$.

Planche 13 I) $(E): t^2 y''(t) + 4t y'(t) + (2-t^2) y(t) - 1 = 0$.

a) Montrer qu'il existe une seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ décomposable en série entière solution de E.

b) Montrer que $g(t) = -1/t^2$ est solution de (E).

c) Quel est l'ensemble des fonction réelles définies sur $\mathbb{R}$ solutions de (E) ?

II) Soit E un espace euclidien et A un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que $E = A \oplus A^\perp$ (indice : on admettra que toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

b) Montrer que $A^{\perp\perp} = A$.

I) a) On parvient à $y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p+2)!}$ de rayon de convergence $R = +\infty$.

En d'autres termes $y(t) = \frac{\mathrm{ch}(t) - 1}{t^2}$ prolongée par continuité en 0.

b) calculs.

c) $t \mapsto \frac{\mathrm{ch}\, t}{t^2}$ est solution de l'équation homogène E_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

$y(t) = \frac{\mathrm{ch}\, t}{t^2} z(t)$ injectée dans E_0 donne $\mathrm{ch}(t) z''(t) + 2\,\mathrm{sh}(t) z'(t) = 0$, $z'(t) = \frac{C}{\mathrm{ch}^2(t)}$ puis $z = C\,\mathrm{th}(t) + D$.

La solution générale de E_0 est $y(t) = \frac{C\,\mathrm{sh}\, t + D\,\mathrm{ch}\, t}{t^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

La solution générale de E_0 est $y(t) = \frac{C\,\mathrm{sh}\, t + D\,\mathrm{ch}\, t}{t^2} + \frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Par étude de recollement en 0, la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la solution initiale.

II) a) Posons $n = \dim E$, $p = \dim A$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de A que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de E. $x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, p\}, (e_i \mid x) = 0$ donc $A^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ puis $E = A \oplus A^\perp$.

b) On a $\dim A^\perp = n - \dim A$ et donc $\dim A^{\perp\perp} = \dim A$. De plus $A \subset A^{\perp\perp}$ car $\forall x \in A, \forall y \in A^\perp, (x \mid y) = 0$ donc $A = A^{\perp\perp}$.

Planche 14 I) a) Montrer que u, endomorphisme d'un espace euclidien vérifiant $\big(u(x) \mid u(y)\big) = (x \mid y)$ est bijectif.

b) Montrer que l'ensemble des endomorphisme orthogonaux est un groupe pour $\circ$.

II) Convergence simple et uniforme de la suite de terme général $f_n(x) = \sin^n x \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

I) a) Si $x \in \ker u$ alors $(u(x) \mid u(x)) = 0$ puis $x = 0$. Ainsi $\ker u = \{0\}$ puis u bijectif.

b) C'est du cours, $O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

II) Pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$, $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$. Pour $x = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0$. Ainsi $f_n \xrightarrow{CS} 0$.

Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0,\pi]$

$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1)$. On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0,\pi]$ et on obtient

$\|f_n\|_\infty = \left| f_n\left(\arccos \dfrac{1}{n+1}\right)\right| = \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n/2} \dfrac{1}{n+1} \to 0$ donc $f_n \xrightarrow{CU} 0$.

Planche 15 I) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.

II) Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.

Calculer $\det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ .Traiter le cas particulier $\forall i \in [\![1,n]\!], a_i = b_i = i$.

I) Soit F la primitive de f s'annulant en 0. $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

$\dfrac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \dfrac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

$\left|\dfrac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right| \le \dfrac{1}{x}\int_0^x |F(t) - \ell|\,\mathrm{d}t$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists A \ge 0, \forall t \ge A, |F(t) - \ell| \le \varepsilon$.

Par continuité sur $[0,A]$, $|F(t) - \ell|$ est majorée par un certain $M > 0$.

Pour $x \ge \max(A, AM/\varepsilon)$ on a $\dfrac{1}{x}\int_0^x |F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\int_0^A |F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{x}\int_A^x |F(t)-\ell|\,\mathrm{d}t \le 2\varepsilon$

Par conséquent $\dfrac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

II) $D_n = \det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \ldots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1-b_n)\ldots(b_{n-1}-b_n)}{(a_1+b_n)\ldots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \ldots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation :

$$D_n=\frac{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n)(a_1-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n)}{(a_1+b_n)\dots(a_n+b_n)(a_n+b_1)\dots(a_n+b_{n-1})}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Par conséquent $D_n=\dfrac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}$.

Puisque $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(j-i)=1!2!\dots(n-1)!$ et $\prod\limits_{1\le i,j\le n}(i+j)=\frac{(n+1)!}{1!}\frac{(n+2)!}{2!}\cdots\frac{(2n)!}{n!}$ on obtient dans le cas particulier

$D_n=\dfrac{(1!2!\dots(n-1)!)^3n!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n)!}$.

Planche 16 I) Extremum locaux et globaux de $f(x,y)=y(x^2+(\ln y)^2)$.

II) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $(I,f,f^2,\dots,f^{n^2})$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f.

I) Points critiques $(0,1)$ et $(0,\mathrm{e}^{-2})$.

En $(0,1)$: $f(0,1)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R},\forall y>0,f(x,y)\ge 0$. Minimum global.

En $(0,\mathrm{e}^{-2})$: $rs-t^2=-4<0$. Maxi local. $f(t,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$, il n'y a pas de maxi global.

II) La famille $(I,f,f^2,\dots,f^{n^2})$ est formée de n^2+1 éléments de l'espace $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension n^2, cette famille est donc liée. Une relation linéaire sur les éléments de cette famille donne un polynôme annulateur non nul de f. Bien entendu, on pourrait aussi parler de polynôme caractéristique.

Planche 17 I) Soit f une application continue de $\mathbb{R}\times[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S\times[a,b]$ pour tout segment S de $\mathbb{R}$.

En déduire que $F:x\mapsto\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\int_0^1\mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}t$. A l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g. Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.

II) Soit a un réel. Pour $M\in M_n(\mathbb{R})$, on poser $L(M)=aM+\mathrm{tr}(M)I_n$ (avec $n\ge 2$)

a) Montrer que L est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ et trouver ses éléments propres et son polynôme minimal.

b) Pour quels a, l'endomorphisme L est-il un automorphisme. Trouver son inverse dans ces cas.

I) a) $S\times[a,b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Etudions la continuité de F en $\alpha\in\mathbb{R}$ et considérons $S=[\alpha-1,\alpha+1]$.

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(x,t),(x',t')\in S\times[a,b],\|(x,t)-(x',t')\|_\infty\le\eta\Rightarrow|f(x,t)-f(x',t')|\le\varepsilon$

Donc pour $|x-\alpha|\le\eta$, on a $|F(x)-F(\alpha)|\le\int_a^b\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon(b-a)$. Ainsi F est continue en α.

b) $(x,t)\mapsto\mathrm{e}^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi par intégration sur un segment.

Pour $x\ne 0$, $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ et $g(0)=1$. Sans difficultés g est continue sur $\mathbb{R}$.

II) a) Il est immédiat que L est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Sp}(L)=\{a,a+n\}$, $E_a(L)=\ker(\mathrm{tr})$ et $E_{a+n}(L)=\mathrm{Vect}(I_n)$, $\Pi_L=(X-a)(X-(a+n))$ car L est diagonalisable et donc son polynôme minimal est le polynôme simple dont les racines en sont les valeurs propres.

b) Par une base diagonalisation, $\det L = a^{n^2-1}(a+n)$ et donc L est un automorphisme ssi $a \neq 0, -n$.

Par le polynôme minimal, on a $L^2 - (2a+n)L + a(a+n)\,\mathrm{Id} = 0$ et donc $L^{-1} = \dfrac{1}{a(a+n)}\left((2a+n)\,\mathrm{Id} - L\right)$.

Planche 18 I) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$.

b) Calculer la limite de (I_n) pour $n \to +\infty$.

c) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

d) Soit $h_n(x) = x^{2n+1}\ln(x)$; étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $h_n(x)$ sur $]0,1[$.

II) Existe-t-il $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^p = 0$ et A^{p-1} soit non nulle pour $p \in \mathbb{N}^*$.

I) a) f_n est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

b) $|I_n| \leq \int_0^1 x^{2n}\left|\dfrac{x\ln x}{x^2-1}\right|\mathrm{d}x$ or $x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ peut être prolongée en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc bornée par un certain M et $|I_n| \leq M\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \dfrac{M}{2n+1} \to 0$.

c) Pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2n+2k+1}\ln x$.

$g_n(x) = x^{2n+2k+1}\ln x$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ et intégrable.

$\int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4(n+k+1)^2}$ est terme général d'une série convergente, on peut donc intervertir somme et intégrale et donc $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{4(n+k+1)^2} = \dfrac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

d) $h_n \xrightarrow{CS} 0$ et par étude des variations de h_n, $\|h_n\|_\infty = |h_n(\alpha)|$ avec $\alpha \in]0,1[$ déterminé par $(2n+1)\ln\alpha + \alpha = 0$, ce qui donne $\|h_n\|_\infty = \dfrac{\alpha^{2n+2}}{2n+1} \leq \dfrac{1}{2n+1} \to 0$ donc $h_n \xrightarrow{CU} 0$.

II) non, pour cause de diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle A.

Planche 19 I) Etudier au voisinage de $t = 1$ la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \int_1^t \dfrac{u^2-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ y(t) = \int_1^t \dfrac{u^2-1}{u^3+1}\,\mathrm{d}u \end{cases}$.

II) Soit $a \in]-1,1[$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.

c) Montrer que f est développable en série entière.

I) $\begin{cases} x(t) = -(t-1) + \dfrac{2}{3}(t-1)^3 + o((t-1)^3) \\ y(t) = -(t-1) + \dfrac{1}{3}(t-1)^3 + o((t-1)^3) \end{cases}$. Point d'inflexion.

II) a) $|\sin(a^n x)| \leq |x||a^n|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.

II) b) $f_n : x \mapsto \sin(a^n x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leq |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{nk} = \dfrac{1}{1-|a|^k} \leq \dfrac{1}{1-|a|}$.

II) c) Par la formule de Taylor-Laplace, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{1}{1-|a|} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Ainsi la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f et donc f est développable en série entière.

Planche 20 I) a) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

b) Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{i^n n^2 z^n}{(n^2+1)2^n}$.

II) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle $\begin{pmatrix} -5+\alpha & 3-\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & -\alpha & \alpha \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

I) a) Si $|z| < R_a$ alors $\sum a_n z^n$ ACV or $|a_n z^n| \sim |b_n z^n|$ donc $\sum b_n z^n$ ACV puis $|z| \leq R_b$. Ainsi $R_a \leq R_b$ puis $R_a = R_b$.

b) $\left|\dfrac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}\right| \sim \dfrac{1}{2^n}$ donc $R = 2$.

II) Pour $\alpha = 0$, la matrice est diagonalisable avec -3 valeur propre simple et -2 valeur propre double.

Planche 21 I) Etudier la convergence de la série $\sum \ln\left(1+\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

II) Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des réels et A la matrice de coefficient général $a_{i,j} = \sin(\alpha_i + \alpha_j)$.
Montrer que $\det A = 0$.

I) $\ln\left(1+\sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV et $\sum \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ CV ssi $\alpha > 1/2$.

II) $\sin(\alpha_i + \alpha_j) = \sin(\alpha_i)\cos(\alpha_j) + \sin(\alpha_j)\cos(\alpha_i)$ donne $\begin{pmatrix} \sin(\alpha_1+\alpha_j) \\ \vdots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_j) \end{pmatrix} = \cos(\alpha_j)\begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) \\ \vdots \\ \sin(\alpha_n) \end{pmatrix} + \sin(\alpha_j)\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \vdots \\ \cos(\alpha_n) \end{pmatrix}$
et donc la matrice $A = (a_{i,j})$ est de rang inférieur à 2. Ainsi, si $n \geq 3$, $\det A = 0$.
Pour $n = 1$, $\det A = \sin(2\alpha_1)$ et pour $n = 2$, $\det A = \sin(2\alpha_1)\sin(2\alpha_2) - \sin^2(\alpha_1+\alpha_2)$. Ces quantités ne sont pas toujours nulles.

Planche 22 I) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)}{\tan(\operatorname{th} x) - \operatorname{th}(\tan x)}$

Indication : on pourra faire des développements limités à l'ordre 7.

II) Soit G un groupe multiplicatif non vide de $M_n(\mathbb{R})$ d'élément neutre E. Montrer que tous les éléments de G sont de même rang.

I) On obtient $1/2$.

II) Pour tout $M \in G$, $ME = M$ donne $\operatorname{rg}(M) \leq \operatorname{rg}(E)$. D'autre part, en notant N l'inverse de M dans G, $E = MN$ donne $\operatorname{rg}(E) \leq \operatorname{rg}(M)$. Ainsi tous les éléments de G ont même rang que E.

Oraux Centrale Algèbre

Planche 23 $*$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Relation entre n, N et P ?

En associant dans P^2 chaque diviseur avec celui qui lui est conjugué, on obtient un produit de N termes égaux à n. Ainsi $P^2 = n^N$.

Planche 24 $*$ On suppose que n est un entier ≥ 2 tel que $2^n - 1$ est premier. Montrer que n est premier.

Si $n = ab$ avec $a,b \in \mathbb{N}^*$ alors $2^n - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + \cdots + 2^{a(b-1)})$ donc $2^a - 1 \mid 2^n - 1$ d'où $2^a - 1 = 1$ ou $2^a - 1 = 2^n - 1$ ce qui implique $a = 1$ ou $a = n$. Ainsi n ne possède que des diviseurs triviaux, il est premier.

Planche 25 $***$ On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout entier $n > 0$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On note $[x]$ la partie entière de x. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.

a) Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

b) Montrer que $\binom{2n}{n}$ divise $\prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]}$.

c) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$.

d) Montrer que $\frac{x}{\ln x} = O(\pi(x))$ quand $x \to +\infty$

a) Pour k suffisamment grand $\left[n/p^k\right] = 0$, la somme évoquée existe donc car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $[n/p]$ divisibles par p, $\left[n/p^2\right]$ divisibles par p^2, etc… donc $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

b) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]$ or $[2x] - 2[x] = 0$ ou 1 donc

$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \operatorname{Card}\left\{k \in \mathbb{N}^* / \left[2n/p^k\right] > 0\right\} \leq \left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]$.

De plus les nombres premiers diviseurs de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont diviseurs d'un entier inférieur à $2n$ (lemme d'Euclide) et sont donc eux-mêmes inférieur à $2n$. Il en découle $\binom{2n}{n} \mid \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]}$ car toutes les puissances de nombres premiers intervenant dans la décomposition de $\binom{2n}{n}$ divisent $\prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]}$.

c) $\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]} = \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\frac{\ln(2n)}{\ln p}} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}$.

d) En passant au logarithme : $\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k = \pi(2n)\ln(2n)$.

A l'aide d'une comparaison intégrale on obtient $\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^{(n+1)} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ donc

$n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - n$ donc $\sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + O(\ln n)$.

Par suite $\sum_{k=1}^{2n}\ln k-2\sum_{k=1}^{n}\ln k=2n\ln(2n)-2n-2(n\ln n-n)+O(\ln n)$ puis $\sum_{k=1}^{2n}\ln k-2\sum_{k=1}^{n}\ln k\sim\ln(2)(2n)$.

On en déduit $\frac{2n}{\ln 2n}=O(\pi(2n))$.

Ajoutons $\frac{x}{\ln x}\sim\frac{2[x/2]}{\ln 2[x/2]}$ par calculs et $\pi(x)\sim\pi(2[x/2])$ car $\pi(x)$ et $\pi(2[x/2])$ ne différent qu'au plus d'une unité et $\pi(x)\to+\infty$. Finalement, une certaine satisfaction.

Planche 26 $*$ Soit x_1,x_2,x_3 les racines de $X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{C}[X]$.

Calculer $S=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_2+x_1}$.

Par les relations coefficients racines d'un polynôme scindé : $\sigma_1=x_1+x_2+x_3=-a$, $\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$ et $\sigma_3=x_1x_2x_3=-c$.

En réduisant au même dénominateur : $S=\frac{x_1}{\sigma_1-x_1}+\frac{x_2}{\sigma_1-x_2}+\frac{x_3}{\sigma_1-x_3}=-3+\sigma_1\left(\frac{1}{\sigma_1-x_1}+\frac{1}{\sigma_1-x_2}+\frac{1}{\sigma_1-x_3}\right)$

avec $\frac{1}{\sigma_1-x_1}+\frac{1}{\sigma_1-x_2}+\frac{1}{\sigma_1-x_3}=\frac{P'(\sigma_1)}{P(\sigma_1)}$ avec $P=X^3+aX^2+bX+c=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ donc $S=\frac{\sigma_1P'(\sigma_1)-3P(\sigma_1)}{P(\sigma_1)}$.

Planche 27 $**$ Soit p,q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p\circ q=q\circ p=\tilde{0}$.

$(\Leftarrow)$ Supposons $p\circ q=q\circ p=\tilde{0}$. $(p+q)^2=p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+q$.

$(\Rightarrow)$ Supposons $p+q$ projecteur. Par les mêmes calculs que ci-dessus $p\circ q+q\circ p=\tilde{0}$.

Soit $\vec{x}\in\ker p$. On a $(p\circ q)(\vec{x})=-(q\circ p)(\vec{x})=\vec{o}$ donc $\vec{x}\in\ker p\circ q$.

Soit $\vec{x}\in\operatorname{Im} p$. On a $(p\circ q)(\vec{x})=-(q\circ p)(\vec{x})=-q(\vec{x})$.

En y appliquant p on obtient : $(p\circ q)(\vec{x})=-(p\circ q)(\vec{x})$ donc $(p\circ q)(\vec{x})=\vec{o}$.

Ainsi $\ker p\subset\ker q\circ p$ et $\operatorname{Im} p\subset\ker q\circ p$ d'où $E=\operatorname{Im} p+\ker p\subset\ker q\circ p$.

Finalement $p\circ q=\tilde{0}$ et de même $q\circ p=\tilde{0}$.

Planche 28 $**$ Soit $E=E_1\oplus E_2$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère

$\Gamma=\{u\in\mathcal{L}(E),\ker u=E_1 \text{ et } \operatorname{Im} u=E_2\}$.

a) Montrer, pour tout u de Γ que $\tilde{u}=u_{E_2}$ est un automorphisme de E_2.

Soit $\phi:\Gamma\to GL(E_2)$ définie par $\phi(u)=\tilde{u}$.

b) Montrer que $\circ$ est une loi interne dans Γ.

c) Montrer que ϕ est un morphisme injectif de $(\Gamma,\circ)$ dans $(GL(E_2),\circ)$.

d) Montrer que ϕ est surjectif.

e) En déduire que $(\Gamma,\circ)$ est un groupe. Quel est son élément neutre.

a) $\operatorname{Im} u$ est stable pour u donc u_{E_2} est bien défini. Par le théorème du rang la restriction de u à tout supplémentaire de $\ker u$ définit un isomorphisme avec $\operatorname{Im} u$. Ici cela donne u_{E_2} automorphisme.

b) Soit $u,v\in\Gamma$. Si $x\in\ker(v\circ u)$ alors $u(x)\in\operatorname{Im} u\cap\ker v$ donc $u(x)\in E_1\cap E_2$ et $u(x)=0$ puis $x\in E_1$. Ainsi $\ker(v\circ u)\subset E_1$ et l'inclusion réciproque est immédiate.

$\operatorname{Im}(v\circ u)=v(u(E))=v(E_2)=E_2$ car v_{E_2} est un automorphisme de E_2. Ainsi $v\circ u\in\Gamma$.

c) Si $\phi(u)=\phi(v)$ alors $u_{E_2}=v_{E_2}$. Or $u_{E_1}=0=v_{E_1}$ donc les applications linéaires u et v coïncident sur des sous-espaces vectoriels supplémentaires et donc $u=v$.

d) Une application linéaire peut être définit de manière unique par ses restrictions linéaires sur deux sous-espaces

vectoriels supplémentaires. Pour $w \in GL(E_2)$ considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $u_{E_1} = 0$ et $u_{E_2} = w$. On vérifie aisément $E_1 \subset \ker u$ et $E_2 \subset \operatorname{Im} u$. Pour $x \in \ker u$, $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $u(x) = 0$ donne alors $u(a) + u(b) = 0$ c'est-à-dire $w(b) = 0$. Or $w \in GL(E_2)$ donc $b = 0$ puis $x \in E_1$. Ainsi $\ker u \subset E_1$ et finalement $\ker u = E_1$. Pour $y \in \operatorname{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $y = u(x)$ donne alors $y = u(a) + u(b) = w(b) \in E_2$. Ainsi $\operatorname{Im} u \subset E_1$ et finalement $\operatorname{Im} u = E_1$. On peut conclure que $u \in \Gamma$ et $\tilde{u} = w$: ϕ est surjectif.
e) φ est un morphisme bijectif : il transporte la structure de groupe existant sur $GL(E_2)$ en une structure de groupe sur $(\Gamma, \circ)$. Le neutre est l'antécédent de Id_{E_2} c'est-à-dire la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

Planche 29 $*$ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\operatorname{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^6$, on a $3 \leq \operatorname{rg} f \leq 6$.
Si $\operatorname{rg} f = 6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\operatorname{rg} f^2 = 6$. Contradiction.
Si $\operatorname{rg} f = 5$ alors $\dim \ker f = 1$. Considérons $g = f_{|\operatorname{Im} f}$. Par le théorème du rang $\dim \ker g = 5 - \operatorname{rg} g$. Or $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f^2$ donc $\operatorname{rg} g \leq 3$ et par suite $\dim \ker g \geq 2$. Or $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim \ker f \geq 2$. Contradiction.
$\operatorname{rg} f = 3$ et $\operatorname{rg} f = 4$ sont possibles en considérant : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche 30 $**$ Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers et qui sont de déterminant égal à 1.

Planche 31 $*$ Montrer que les matrices triangulaires réelles qui commutent avec leur transposée sont diagonales.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient d'indice (i,i) de ${}^tAA$ est $\sum_{j=1}^{i} a_{j,i}^2$ alors que celui de $A\,{}^tA$ est $\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}^2$.
Pour $i = 1$, on en déduit $a_{1,2} = \ldots = a_{1,n} = 0$ puis pour $i = 2$, $a_{2,3} = \ldots = a_{2,n} = 0$ et ainsi de suite. On peut conclure que A est diagonale.

Planche 32 $*$ Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et lui sont semblables ?

Posons $D = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$. L'étude, coefficient par coefficient, de la relation $MD = DM$ donne que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à D sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

Planche 33 $\quad *$ Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $J=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que J est diagonalisable.

Notons $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est J. Posons $\varepsilon_1=e_1+\cdots+e_n$, de sorte que $f(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$. Puisque $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} J=1$, on peut introduire $(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ base du noyau de f. Il est alors clair que $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et que la matrice de f dans celle-ci est diagonale.

Planche 34 $\quad **$ Existe-t-il dans $M_n(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal X^2+1 ?

Supposons n est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ étant de degré impair possèdera une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme X^2+1.

Supposons n est pair. Considérons $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A_n=\operatorname{diag}(A,\dots,A)\in M_n(\mathbb{R})$. A_n n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2. De plus $A_n^2=I_n$ donc X^2+1 annule A_n. Au final, X^2+1 est polynôme minimal de A_n.

Planche 35 $\quad ***$ Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{tr} M=0$, il existe deux matrices A et B telles que $M=AB-BA$.

Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P i.e. $M'=P^{-1}MP$.
Si on peut écrire $M'=A'B'-B'A'$ alors $M=AB-BA$ avec $A=PA'P^{-1}$ et $B=PB'P^{-1}$.
Etablissons le résultat en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.
Si M est taille 1 : ok
Supposons la propriété établie au rang $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n+1$ de trace nulle.

Montrons que M est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c}0 & *\\ \hline * & *\end{array}\right)$.

Si M est matrice d'une homothétie alors $\operatorname{tr} M=0$ permet de conclure $M=0_n$.
Sinon, il existe des vecteurs qui ne soit pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M. Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient le résultat voulu.

Le problème revient maintenant à établir le résultat quand M est de la forme $\left(\begin{array}{c|c}0 & L\\ \hline C & M'\end{array}\right)$ avec $\operatorname{tr} M'=0$.

Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire $M'=A'B'-B'A'$.
Soit λ qui ne soit par valeur propre de B'.
Posons $A=\left(\begin{array}{c|c}1 & L(B'-\lambda I)^{-1}\\ \hline (\lambda I-B')^{-1}C & A'\end{array}\right)$ et $B=\left(\begin{array}{c|c}\lambda & 0\\ \hline 0 & B'\end{array}\right)$. On a $M=AB-BA$. Récurrence établie.

Planche 36 $\quad **$ Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ distincts et $P(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X)=\begin{vmatrix}\dfrac{P(X)}{X-\lambda_1} & \dfrac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \dfrac{P(X)}{X-\lambda_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $\Delta(\lambda_k)=(-1)^{k+1}\prod_{i\neq k}(\lambda_k-\lambda_i)V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_k,\dots,\lambda_n)=(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$
où $V_n(a_1,\dots,a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Planche 37 $**$ Pour $A\in M_n(\mathbb{K})$, on note $\tilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

a) Calculer $\det\tilde{A}$.

b) Etudier le rang de $\tilde{A}$.

c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ le sont aussi.

d) Calculer $\tilde{\tilde{A}}$.

a) On sait $\tilde{A}A=A\tilde{A}=\det A.I_n$.
Si A est inversible alors $\det\tilde{A}.\det A=(\det A)^n$ donne $\det\tilde{A}=(\det A)^{n-1}$.
L'application $A\mapsto\det\tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A\mapsto(\det A)^{n-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det\tilde{A}=(\det A)^{n-1}$ pour tout $A\in M_n(\mathbb{K})$.
b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc $\operatorname{rg}(A)=n\Rightarrow\operatorname{rg}(\tilde{A})=n$.
Si $\operatorname{rg}(A)\leq n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A}=0$. Ainsi $\operatorname{rg}(A)\leq n-2\Rightarrow\operatorname{rg}(\tilde{A})=0$.
Si $\operatorname{rg}(A)=n-1$ alors $\dim\ker A=1$ or $A\tilde{A}=\det A.I_n=0$ donne $\operatorname{Im}\tilde{A}\subset\ker A$ et donc $\operatorname{rg}(\tilde{A})\leq 1$. Or puisque $\operatorname{rg}(A)=n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A}\neq O$. Ainsi $\operatorname{rg}(A)=n-1\Rightarrow\operatorname{rg}(\tilde{A})=1$.
c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A\in GL_n(\mathbb{K})$, $(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP)=\det A.I_n$ et $P^{-1}AP$ inversible donc $P^{-1}\tilde{A}P=\widetilde{P^{-1}AP}$. Ainsi $\tilde{A}=P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$. Les applications $A\mapsto\tilde{A}$ et $A\mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $GL_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $M_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP=B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P=\widetilde{P^{-1}AP}=\tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.
d) Si A est inversible alors $\tilde{A}=\dfrac{1}{\det A}A^{-1}$ et $\tilde{\tilde{A}}=\dfrac{1}{\det\tilde{A}}\tilde{A}^{-1}=\dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}A$.
Si $\operatorname{rg}A\leq n-2$ alors $\tilde{A}=0$ et $\tilde{\tilde{A}}=0$.
Si $\operatorname{rg}A=n-1$ et $n\geq 3$ alors $\operatorname{rg}(\tilde{A})=1\leq n-2$ et $\tilde{\tilde{A}}=0$.
Si $\operatorname{rg}A=1$ et $n=2$ alors $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ et $\tilde{\tilde{A}}=A$.

Planche 38 $***$ a) Soit $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}\geq 0$.

b) Soit $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.

d) Soit $A,B,C,D\in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AC=CA$. Montrer que $\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det(AD-CB)$.

a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :
$\det\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix}A&iB\\-iB&-A\end{pmatrix}$ puis par opérations sur les lignes :
$\det\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix}A&iB\\A-iB&-A+iB\end{pmatrix}$ et par opérations sur les colonnes :

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A+iB & iB \\ 0 & -A+iB\end{pmatrix}$ donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det(A+iB)\det(-A+iB)$ et enfin $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$. Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$.

b) $\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$ par exemple.

d) Si A est inversible, on remarque : $\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.

On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :

Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A+\lambda I_n$ est inversible et commute avec C).

Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Planche 39 $***$ a) Soit A et B dans $M_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que soit $B \in \mathbb{K}[A]$, soit $A \in \mathbb{K}[B]$.

b) Le résultat subsiste-t-il dans $M_3(\mathbb{K})$?

a) Contrairement à ce qu'entend l'énoncé, l'alternative $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$ n'est pas exclusive.

Commençons par quelques cas particuliers.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ alors $A \in \mathbb{K}[B]$ en s'appuyant sur un polynôme constant.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les matrices qui commutent avec A sont diagonales donc B est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$. En considérant $P = aX+b$ tel que $P(\lambda_1) = \alpha_1$ et $P(\lambda_2) = \alpha_2$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$, une étude de commutativité par coefficients inconnus donne $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$. Pour $P = \dfrac{\beta}{\mu}X + \gamma$ avec $\dfrac{\beta\lambda}{\mu} + \gamma = \alpha$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Enfin, dans le cas général, A est semblable à l'un des trois cas précédent via une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$. La matrice $B' = P^{-1}BP$ commute alors avec $A' = P^{-1}AP$ donc B' est polynôme en A' et par le même polynôme B est polynôme en A.

b) On imagine que non, reste à trouver un contre-exemple.

Par la recette des tâtonnements successifs ou saisi d'une inspiration venue d'en haut, on peut proposer $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On vérifie que A et B commutent et ne sont ni l'un ni l'autre polynôme en l'autre car tout polynôme en une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Planche 40 $**$ Soit n un entier ≥ 2 et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.

a) On suppose que $I_n \notin \mathcal{A}$. Montrer, si $M^2 \in \mathcal{A}$, que $M \in \mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ que la matrice $E_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.

b) On prend $n = 2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

a) Supposons $M^2 \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ et $\text{Vect}(I_n)$ étant supplémentaires dans $M_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$. On a alors $M^2 = A^2 + 2\lambda A I_n + \lambda^2 I_n$ d'où l'on tire $\lambda^2 I_n \in \mathcal{A}$ puis $\lambda = 0$ ce qui donne $M \in \mathcal{A}$.
Pour $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in \mathcal{A}$ donc $E_{i,j} \in \mathcal{A}$ puis $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i} \in \mathcal{A}$. Par suite $I_n = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n} \in \mathcal{A}$.
Absurde.
b) Formons une équation de l'hyperplan $\mathcal{A}$ de la forme $ax + by + cz + dt = 0$ en la matrice inconnue $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. Cette équation peut se réécrire $\text{tr}(AM) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Puisque $I_2 \in \mathcal{A}$, on a $\text{tr}\, A = 0$. Soit λ une valeur propre de A.
Si $\lambda \neq 0$ alors $-\lambda$ est aussi valeur propre de A et donc A est diagonalisable via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ a ses coefficients diagonaux égaux.
Mais alors pour $M = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $N = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ on a $M, N \in \mathcal{A}$ alors que $MN \in \mathcal{A}$.
Si $\lambda = 0$ alors A est trigonalisable en $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.
L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme comme voulu.

Planche 41 $**$ Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme de E.
a) Réduire l'expression $\varphi(x,y,z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] + [x, y, u(z)]$.
b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $v(x \wedge y) = u(x) \wedge y - u(y) \wedge x$.

a) φ est une forme trilinéaire alternée sur E de dimension 3 donc φ est proportionnel au déterminant. Pour (i,j,k) base orthonormée, $\varphi(i,j,k) = (i \mid u(i)) + (j \mid u(j)) + (k \mid u(k)) = \text{tr}\, u$ donc $\varphi(x,y,z) = \text{tr}\, u.[x,y,z]$.
b) $(u(x) \wedge y - u(y) \wedge x \mid z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] = \text{tr}\, u[x,y,z] - [x, y, u(z)] = (x \wedge y, (\text{tr}\, u.\text{Id} - u)(z))$. L'adjoint de $(\text{tr}\, u.\text{Id} - u)$ résout notre problème.

Oraux Centrale Analyse

Planche 42 $**$ Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$.
a) Montrer que N définit une norme sur E.
b) Comparer N et $\|.\|_\infty$.

a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \geq 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.
b) Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n/\sqrt{2} \to +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Planche 43 $**$ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme : $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
A = { suites croissantes }, B = { suites convergeant vers 0 }, C = { suites convergentes }
D = { suites admettant 0 pour valeur d'adhérence } et E = { suites périodiques }.

A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.
B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme

$\|.\|_\infty$ alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists p\in\mathbb{N}$, $\|u-u^p\|_\infty\le\varepsilon/2$ et puisque $u_n^p\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\ge N,|u_n^p|\le\varepsilon/2$ et donc $|u_n|\le|u_n-u_n^p|+|u_n^p|\le\varepsilon$. Ainsi $u\to 0$ et donc $u\in B$.

C est fermé. En effet si $u^p=(u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u=(u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p-\ell^q|\le\|u^p-u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p=u^p-\ell^p$. $v^p\in B$ et $v^p\to u-\ell$ donc $u-\ell\in B$ et $u\in C$.

D est fermé car si $u^p=(u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u=(u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists p\in\mathbb{N}$, $\|u-u^p\|_\infty\le\varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p|\le\varepsilon/2$ et donc tels que $|u_n|\le|u_n-u_n^p|+|u_n^p|\le\varepsilon$. Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u\in D$.

E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p=1$ si $p\mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors $u^p=\sum_{k=1}^p\frac{1}{2^k}\delta^k$ qui est élément de E. La suite u^p converge car $\|u^{p+q}-u^p\|_\infty\le\sum_{k=p+1}^{p+q}\frac{1}{2^k}\le\frac{1}{2^p}\to 0$ et la limite u de cette suite n'est pas périodique car $u_0=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^p\frac{1}{2^k}=1$ et que $\forall n>0$, $u_n<1$ puisque pour que $u_n=1$ il faut $k\mid n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Planche 44 $**$ Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose $f(x)=\dfrac{1}{\max(1,\|x\|)}x$.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Si $\|x\|,\|y\|\le 1$ alors $\|f(y)-f(x)\|=\|y-x\|$.

Si $\|x\|\le 1$ et $\|y\|>1$ alors $\|f(y)-f(x)\|=\left\|\frac{y}{\|y\|}-x\right\|=\left\|\frac{y}{\|y\|}-y+y-x\right\|\le\|y\|-1+\|y-x\|\le 2\|y-x\|$.

Si $\|x\|,\|y\|>1$ alors $\|f(y)-f(x)\|=\left\|\frac{y}{\|y\|}-\frac{x}{\|x\|}\right\|=\left\|\frac{y-x}{\|y\|}+x\left(\frac{1}{\|y\|}-\frac{1}{\|x\|}\right)\right\|\le\frac{\|y-x\|}{\|y\|}+\frac{\|x\|-\|y\|}{\|y\|}\le 2\|y-x\|$.

Au final f est 2-lipschitzienne.

Supposons maintenant que la norme $\|.\|$ soit hilbertienne.

Si $\|x\|,\|y\|\le 1$ alors $\|f(y)-f(x)\|=\|y-x\|$.

Si $\|x\|\le 1$ et $\|y\|>1$ alors $\|f(y)-f(x)\|^2-\|y-x\|^2=1-\|y\|^2-2\frac{\|y\|-1}{\|y\|}(x\mid y)$.

Or $|(x\mid y)|\le\|x\|\|y\|\le\|y\|$ donc $\|f(y)-f(x)\|^2-\|y-x\|^2\le 1-\|y\|^2+2(\|y\|-1)=-(1-\|y\|)^2\le 0$.

Si $\|x\|,\|y\|>1$ alors $\|f(y)-f(x)\|^2-\|y-x\|^2=2-\|y\|^2-\|x\|^2-2\frac{\|x\|\|y\|-1}{\|x\|\|y\|}(x\mid y)$

Or $|(x\mid y)|\le\|x\|\|y\|$ donc $\|f(y)-f(x)\|^2-\|y-x\|^2=2-\|y\|^2-\|x\|^2+2(\|x\|\|y\|-1)=-(\|x\|-\|y\|)^2\le 0$.

Au final f est 1-lipschitzienne.

Planche 45 $**$ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y\in A$ tel que $|x-y|=d(x,A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Soit $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique $y\in A$ tel que $|x-y|=d(x,A)$. Or $d(x,A)=0$ donc $x=y\in A$. Ainsi A est fermé.

Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a<c<b$ tel que $a,b\in A$ et $c\notin A$.

Posons $\alpha = \sup\{x \in A / x \le c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A / x \ge c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset C_{\mathbb{R}} A$.

Posons alors $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \dfrac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma-\alpha| = |\gamma-\beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité.

Absurde.

Planche 46 $\quad *$ Développement asymptotique à trois termes de : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k}{n^2}$.

Pour $x \in [0,1]$, $\left|\sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3\right| \le \dfrac{1}{120}$.

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} + \dfrac{1}{6}\dfrac{k^3}{n^6} + M_n$ avec $|M_n| \le \dfrac{1}{120}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^5}{n^{10}} \le \dfrac{1}{120}\dfrac{1}{n^4}$ donc $M_n = o(1/n^3)$.

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^3}{n^6} = \dfrac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \sim \dfrac{1}{4n^2}$ donc $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Planche 47 $\quad **$ Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \ge 1$. On la note x_n. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Posons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n \in \mathbb{R}^+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n \in [0,1]$. Puisque $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \le f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1} \ge x_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$, à la limite $\ell \in [0,1]$. Si $\ell < 1$ alors $0 \le x_n^n \le \ell^n \to 0$ et la relation $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$ donne à la limite $\ell^2 = 1$ ce qui est absurde. On conclut que $\ell = 1$.

Posons $u_n = 1 - x_n$, $(1-u_n)^n = u_n(2-u_n)$ donne $n\ln(1-u_n) = \ln u_n + \ln(2-u_n)$ d'où $-nu_n \sim \ln u_n$ puis $\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$ or $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$ donc $\ln u_n \sim -\ln n$ puis $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$ et enfin $x_n - 1 \sim -\dfrac{\ln n}{n}$.

Planche 48 $\quad **$ Pour $n \ge 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n - nX + 1$.

a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.

b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \to +\infty$.

c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

a) P_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ vers $[-n,1]$.

b) $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \le P_n(x_n) = 0$ donc $x_{n+1} \le x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0,1]$. Si $\ell > 0$ alors $0 = P_n(x_n) \to -\infty$, c'est absurde. On conclut $\ell = 0$.

c) $\dfrac{x_n^n}{nx_n} = \dfrac{1}{n}x_n^{n-1} \to 0$ donc $x_n^n = o(nx_n)$ puis sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $x_n \sim 1/n$.

d) Posons $y_n = x_n - 1/n$, on a $\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right)^n = ny_n$ puis $n\ln\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right) = \ln n + \ln y_n$. Or $\dfrac{1}{n} + y_n \sim \dfrac{1}{n} \to 0$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right) \sim -\ln n$, de plus $\ln n = o(n\ln n)$ donc $\ln y_n \sim -n\ln n$. En revenant à la relation de départ $n^{n+1}y_n = (1+ny_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+ny_n)}$ avec $n\ln(1+ny_n) \sim n^2 y_n$ et $\ln n^2 y_n = 2\ln n + \ln y_n \to -\infty$ donc $n^2 y_n \to 0$ puis $n^{n+1}y_n \to 1$. Finalement $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right)$.

Planche 49 $\quad **$ Pour $n \ge 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n - nX + 1$.

a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.

b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \to +\infty$.

c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

a) P_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ vers $[-n,1]$.

b) $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \le P_n(x_n) = 0$ donc $x_{n+1} \le x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0,1]$. Si $\ell > 0$ alors $0 = P_n(x_n) \to -\infty$, c'est absurde. On conclut $\ell = 0$.

c) $\dfrac{x_n^n}{nx_n} = \dfrac{1}{n} x_n^{n-1} \to 0$ donc $x_n^n = o(nx_n)$ puis sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $x_n \sim 1/n$.

d) Posons $y_n = x_n - 1/n$, on a $\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right)^n = ny_n$ puis $n\ln\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right) = \ln n + \ln y_n$. Or $\dfrac{1}{n} + y_n \sim \dfrac{1}{n} \to 0$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{n} + y_n\right) \sim -\ln n$, de plus $\ln n = o(n\ln n)$ donc $\ln y_n \sim -n\ln n$. En revenant à la relation de départ $n^{n+1}y_n = (1+ny_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+ny_n)}$ avec $n\ln(1+ny_n) \sim n^2 y_n$ et $\ln n^2 y_n = 2\ln n + \ln y_n \to -\infty$ donc $n^2 y_n \to 0$ puis $n^{n+1}y_n \to 1$. Finalement $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right)$.

Planche 50 $**$ a) Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$ ù $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)

b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Soit $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.

c) Calculer ℓ en utilisant $f(x) = \ln(1+x)$.

d) Si f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ est continue et vérifie $f(0) = 0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n).

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(p+1)+1} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(p+1)} - \dfrac{1}{n+1} \le 0$ et $u_n \le \dfrac{np}{n+1} \le p$ donc (u_n) converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1,\dots,np\}$, il existe $c_{n,k} \in \left]0, \dfrac{1}{n+k}\right[$ tel que $f\left(\dfrac{1}{n+k}\right) - f(0) = f'(c_{n,k})\dfrac{1}{n+k}$ (TAF)

On a alors $v_n - \ell f'(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} \left(f'(c_{n,k}) - f'(0)\right)\frac{1}{n+k}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha]$ on ait $|f'(x) - f'(0)| \le \varepsilon$.

Pour n suffisamment grand pour que $\dfrac{1}{n+1} \le \alpha$, on a $c_{n,k} \in [0,\alpha]$ et donc $|v_n - \ell f'(0)| \le \varepsilon \ell$.

On en déduire $v_n \to \ell f'(0)$.

c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln((n+1)p+1) - \ln(n+1) \to \ln p$. On conclut $\ell = \ln p$.

d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \ge \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \to +\infty$.

Planche 51 $**$ a) Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}$. On pourra introduire la fonction $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ à l'aide de la constante d'Euler.

a) f est décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$. Pour $p\geq 4$, $\int_p^{p+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\leq\frac{\ln p}{p}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ donc $u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+v_n$

avec $\int_4^{n+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\leq v_n\leq\int_3^n\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ donc $v_n\sim\frac{1}{2}(\ln n)^2$. Etudions $w_n=u_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2$,

$w_n-w_{n-1}=\frac{\ln n}{n}-\int_{n-1}^{n}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\leq 0$ donc (w_n) est décroissante. D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi $u_n=\frac{1}{2}(\ln n)^2+C+o(1)$.

b) $\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$ donc

$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{n}-\sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln(n)}{n}=\ln 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+u_N-u_{2N}$. Par le DA précédent, on obtient :

$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\ln 2.\ln n+\ln(2)\gamma+\frac{1}{2}(\ln n)^2+C-\frac{1}{2}(\ln 2n)^2-C+o(1)$

et après simplification $\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$. De plus

$\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}+o(1)\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$. N'est-ce pas magnifique ?

Planche 52 $*$ Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$.

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

$\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Il y a convergence ssi $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ ce qui correspond à $a=-2$ et $b=1$.
Dans ce cas :

$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\sum_{n=1}^{N}\ln n-2\sum_{n=2}^{N+1}\ln n+\sum_{n=3}^{N+2}\ln n$

$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\ln 1+\ln 2-2\ln 2-2\ln(N+1)+\ln(N+1)+\ln(N+2)\to-\ln 2$

Planche 53 $**$ Soit $a>0,b>0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+bk)$, $B_n=\prod_{k=1}^{n}(a+bk)^{1/n}$.

Trouver $\lim_{n^\infty}\frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e .

$A_n=a+\frac{b(n+1)}{2}$, $\ln B_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(a+bk)$. Posons $f(t)=\ln(a+bt)$ fonction croissante.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale : $\sum_{k=1}^{n}f(k)=n\ln(a+bn)-n+o(n)$ donc

$\ln\frac{B_n}{A_n}=\ln B_n-\ln A_n=\ln\left(\frac{a+bn}{a+bn/2}\right)-1+o(1)\to\ln 2-1$ d'où $\frac{B_n}{A_n}\to\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Planche 54 $**$ a) Etudier $\sum u_n$ où $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$.

b) Etudier $\sum v_n$ où $v_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$.

a) $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}=\int_0^1\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\mathrm{d}x$, $\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\to 1-x$ et $\left|\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\right|\leq\frac{1-x}{1-x}=1$ donc

$u_n\to\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. La série diverge grossièrement.

b) $v_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}=\int_0^1\frac{1-x}{1-x^{n+1}}x^n\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\mathrm{d}x$ avec par intégration par parties

$\int_0^1\frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{n+1}\ln(1-x^{n+1})(1-x)\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x$

avec $-\int_0^1\ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}x^{(n+1)k}\mathrm{d}x$. Or $\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1\left|\frac{1}{k}x^{(n+1)k}\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k((n+1)k+1)}<+\infty$ donc

$-\int_0^1\ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\int_0^1x^{(n+1)k}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k((n+1)k+1)}\leq\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ puis $v_n=O\left(1/n^2\right)$ et donc la série de terme général v_n converge.

Planche 55 $***$ Soit $\alpha>0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_1>0$ et $\forall n\geq 1$, $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^\alpha u_n}$.

a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.

b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.

c) Equivalent de $(u_n-\ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ .

a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.

Si $\alpha>1$, on a $u_{n+1}\leq u_n+\frac{1}{n^\alpha u_1}$ puis par récurrence $u_n\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha u_1}$. Ainsi (u_n) converge.

Si (u_n) converge. Posons $\ell=\lim u_n$, on observe $\ell>0$. On a $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$, or la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente donc $\alpha>1$.

b) $u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{2}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}\sim\frac{2}{n^\alpha}$ donc $u_n^2\sim 2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha}$ or par comparaison série-intégrale, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha<1$ et $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\sim\ln n$ si $\alpha=1$. On conclut alors $u_n\sim\sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$ si $\alpha<1$ et $u_n\sim\sqrt{2\ln n}$ si $\alpha=1$.

c) Posons $v_n=u_n-\ell$. $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$ donc $\sum_{k=n}^{+\infty}v_{k+1}-v_k=-v_n\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell n^\alpha}\sim\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$ puis

$v_n=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$.

Planche 56 $*$ Etudier la limite de $\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$ où $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est continue.

On applique le théorème de convergence dominée en exploitant f bornée car continue sur segment. On obtient $\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t\to f(0)$

Planche 57 $**$ Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$.

La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t=\pi/2+\pi\quad[2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left|\sin^n t\right|$

$f_n(t)=\left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\right|\xrightarrow{CS}f(t)$ avec $f(t)=0$ si $t\neq\pi/2\,[n\pi]$ et $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$ sinon.

f_n et f sont continues par morceaux et $|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0,+\infty[$ donc par convergence dominée : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Planche 58 $**$ a) Démontrer la convergence de la série de terme général $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

b) Comparer a_n et $n\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$.

c) En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1-t\mathrm{e}^{-t})^2}\mathrm{d}t$.

a) $a_{n+1}/a_n \to 1/\mathrm{e} < 1$.

b) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$. Par intégration par parties, on obtient $I_n = \dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où $a_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$ et la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |nt^n \mathrm{e}^{-nt}|\mathrm{d}t = \sum a_n$ converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$ avec $\displaystyle(1-t\mathrm{e}^{-t})\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$ d'où la conclusion.

Planche 59 $**$ Existence et calcul de $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\mathrm{d}t$.

Posons $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$. $t \mapsto g(x,t)$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $x \in [0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2}$ avec $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

Par intégration par parties, $\varphi'(x) = \left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}x\varphi(x)$.

φ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$.

Planche 60 $***$ Soit $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

b) Plus généralement, nature de la sérier de terme général $u_n(\alpha)$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2,3$.

a) $u_n(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t(\cos t)^n \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$. La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

b) Pour $\alpha \leq 1$, $(\sin t)^\alpha \geq \sin t$ donc $u_n(\alpha) \geq u_n(1)$ et donc la série de terme général $u_n(\alpha)$ est divergente.

Pour $\alpha > 1$, $\alpha = 1+\beta$, $u_n(\alpha) = \left[-\sin^\beta t\dfrac{\cos^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\pi/2} + \dfrac{\beta}{n+1}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t = \frac{\beta}{n+1}\int_0^{\pi/2} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t = \int_0^{\varepsilon} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t \leq \varepsilon.\varepsilon^{\beta-1} = \varepsilon^\beta$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{\beta-1} t\cos^{n+2} t\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\cos^{n+2}\varepsilon$.

Pour $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\cos^{n+2}\varepsilon=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}}=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $0\leq u_n(\alpha)\leq\dfrac{\beta}{(n+1)n^{\beta/3}}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{\beta}{n^{1+\beta/3}}$ donc la série de terme général $u_n(\alpha)$ converge.

c) Soit $\alpha>1$,

Les fonctions $t\mapsto\sin^\alpha t\cos^n t$ sont continues par morceaux et positives.

La série de ses fonctions converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty}\sin^\alpha t\cos^n t=\dfrac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}$ qui est continue par morceaux.

Puisque la série des $\int_0^{\pi/2}(\sin t)^\alpha(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ convergente, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cos^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}\mathrm{d}t$.

Pour $\alpha=2$: $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 t}{1-\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}1+\cos t=\dfrac{\pi}{2}+1$.

Pour $\alpha=3$: $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^3 t}{1-\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin t(1+\cos t)=\dfrac{3}{2}$.

Planche 61 $***$ a) Existence de $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que A se met sous la forme $A=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ avec $u_n\geq 0$. En déduire $A\geq 0$.

c) Mêmes questions avec $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t$.

d) Comment retrouver ces résultats avec un logiciel de calcul formel

a) $\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin(t^2)\mathrm{d}t+\int_\pi^x\sin(t^2)\mathrm{d}t$. Or

$\int_{\sqrt\pi}^x\sin(t^2)\mathrm{d}t=\int_{\sqrt\pi}^x\dfrac{2t}{2t}\sin(t^2)\mathrm{d}t=\left[-\dfrac{\cos(t^2)}{2t}\right]_{\sqrt\pi}^x-\int_{\sqrt\pi}^x\dfrac{\cos(t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t$ donc

$\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}\int_0^{\sqrt\pi}\sin(t^2)\mathrm{d}t-\dfrac{1}{2\sqrt\pi}-\dfrac{1}{2}\int_{\sqrt\pi}^{+\infty}\dfrac{\cos(t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ où l'on vérifie que la dernière intégrale converge.

b) $A=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(t^2)\mathrm{d}t$ et $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(t^2)\mathrm{d}t=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin(u)}{2\sqrt u}\mathrm{d}u=(-1)^n\int_0^\pi\dfrac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}}\mathrm{d}v=(-1)^n u_n$ avec $u_n=\int_0^\pi\dfrac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}}\mathrm{d}v$. Aisément $u_n\geq 0$, $u_{n+1}\leq u_n$ et $u_n\to 0$ donc on peut appliquer le critère spécial qui assure que A est du signe de $(-1)^0u_0$ c'est-à-dire positif.

c) La question a) est identique. Pour b) les choses se compliquent car on découpe l'intégrale en $\pi/2$, $3\pi/2$,… pour obtenir :

$B=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt v}\mathrm{d}v+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{v+n\pi}}\mathrm{d}v$. Le CSSA s'applique à la série sous-jacente et B est du signe de $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt v}\mathrm{d}v-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}}\mathrm{d}v+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}}\mathrm{d}v$.

Or $\dfrac{1}{\sqrt{v+\pi}}-\dfrac{1}{\sqrt{v+2\pi}}\leq\dfrac{\pi}{2\left(v+\pi\right)^{3/2}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{v+\pi}}$ donc

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}}\mathrm{d}v-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}}\mathrm{d}v\leq\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{4\sqrt{v+\pi}}\mathrm{d}v\leq\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{4\sqrt{\pi/2}}\mathrm{d}v=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt{\pi/2}}\mathrm{d}v\leq\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos v}{2\sqrt v}\mathrm{d}v$

et on peut conclure.

d) on utilise l'instruction evalf.

Planche 62 $*$ Réaliser le développement en série entière en 0 de $x\mapsto\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} x^{2n} \mathrm{d}u$. Pour $|x|<1$, il y a convergence normale pour $u \in [0,1]$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}$.

Planche 63 $**$ Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

b) Somme de $\sum a_n x^n$.

a) $|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$ donc $R \geq 1$.

$|a_n| \geq \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\mathrm{d}t \geq \frac{1}{4n(n-1)}$ donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) x^n \mathrm{d}t$ or par CU de la suite de fonctions de la variable t sur $[0,1]$ (CU obtenue par CN grâce à $|x|<1$) on peut permuter somme et intégrale.

$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1}(t-k) x^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}t = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

Planche 64 $**$ On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$.

a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

b) Justifier la définition de f sur $]-1,1[$ puis calculer f.

c) Calculer $N(n,p)$.

d) Etudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

a) $N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$.

b) $D(n) \leq n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right| \leq 1$ qui implique $R \geq 1$.

On a $\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

c) $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$ donc $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ puis $N(n,p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

d) $\frac{1}{n!} N(n,p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{p!\mathrm{e}}$.

Planche 65 $***$ Soit γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telle que $\forall s \in \mathbb{R}, |\gamma'(s)| = 1$. On note S l'aire orientée délimitée par $\gamma_{|[0,2\pi]}$.

a) Exprimer S à l'aide des coefficients de Fourier de γ.

b) Montrer $S \leq \pi$ et préciser le cas d'égalité.

a) Posons $x=\operatorname{Re}(\gamma)$, $y=\operatorname{Im}(\gamma)$. $S=\int_\gamma \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(x(s)y'(s)-y(x)x'(s)\big)\mathrm{d}s$ donc $S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{Im}(\overline{\gamma}(s)\gamma'(s))\mathrm{d}s=\pi\operatorname{Im}(\gamma\mid\gamma')$ en notant $(.\,|\,.)$ le produit scalaire usuel.

Par la formule polarisée de Parseval : $(\gamma\mid\gamma')=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c_n(\gamma)}c_n(\gamma')=\sum_{n\in\mathbb{Z}}in\left|c_n(\gamma)\right|^2$ car $c_n(\gamma')=inc_n(\gamma)$ et donc $S=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\left|c_n(\gamma)\right|^2$.

b) Par la formule de Parseval on a : $\sum_n\left|inc_n\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\gamma'(s)\right|^2\mathrm{d}s=1$ donc $\sum_n n^2\left|c_n\right|^2=1$.

$S=\pi\sum_n n\left|c_n\right|^2\le\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2\left|c_n\right|^2\le\pi$ avec égalité ssi $c_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ tel que $|n|>1$. On a alors $\gamma(s)=c_0+c_1\mathrm{e}^{is}$ avec $|c_1|=1$ car $|\gamma'(s)|=1$. γ est un paramétrage direct d'un cercle de diamètre 1.

Planche 66 $**$ On pose $\varphi(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}$ pour $x\ne y$.

a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté encore φ.

b) Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

a) On pose $\varphi(a,a)=-\sin a$ et on observe que $\varphi(x,y)\to\varphi(a,a)$ quand $(x,y)\to(a,a)$ avec $x\ne y$ et avec $x=y$.

b) En vertu de $\cos p-\cos q=-2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, on a $\varphi(x,y)=-\operatorname{sinc}(x-y)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ avec sinc de classe $\mathcal{C}^\infty$ car DSE.

Planche 67 $**$ Montrer que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p ssi $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=pf(x_1,\dots,x_n)$.

Supposons f homogène de degré p i.e. $\forall t>0$, $f(tx_1,\dots,tx_n)=t^pf(x_1,\dots,x_n)$.
En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t=1$, on obtient
$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=pf(x_1,\dots,x_n)$.

Inversement, cette relation donne $t\mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle $tg'(t)=pg(t)$ donc f homogène de degré p.

Notons que pour $n=1$, $f(x)=|x|^3$ vérifie la relation et n'est homogène de degré 3 que dans le sens préciser initialement.

Planche 68 $*$ Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x-2y$.

L'étude des points critiques donne $(-2,2)$ seul point critique.

En posant $x=-2+u$ et $y=2+v$, $f(x,y)=u^2+uv+v^2=\rho^2(1+\cos\theta\sin\theta)\ge 0$.

Il y a un minimum global en $(-2,2)$.

Planche 69 $*$ Déterminer les extremums de $x^{\ln x}+y^{\ln y}$ sur $]0,+\infty[^2$.

L'étude des points critiques donne $(1,1)$ seul point critique.

La fonction $t\mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x,y)\mapsto x^{\ln x}+y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1,1)$.

Planche 70 $*$ Soit $a>0$. Montrer que $f:(x,y)\mapsto x+y+\dfrac{a}{xy}$ admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$

L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$ seul point critique.

Posons $\alpha=\sqrt[3]{a}$. $f(x,y)-f(\alpha,\alpha)=x+y+\dfrac{\alpha^3}{xy}-3\alpha=\dfrac{x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy}{xy}$.

Etudions $\varphi:\alpha\mapsto x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en $\sqrt{xy}$ de valeur $x^2y+xy^2-2xy\sqrt{xy}=xy(x+y-2\sqrt{xy})=xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$ donc pour tout $x,y>0$, $f(x,y)\geq f(\alpha,\alpha)$.

De plus, il y a égalité ssi $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ et $\alpha=\sqrt{xy}$ i.e. $x=y=\alpha$.

Planche 71 $**$ Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.
Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.
En introduisant un repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(a,b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB=1$) la fonction étudiée est $f(x,y)=y(bx-ay)(b(x-1)-(a-1)y)$. On résout le système formé par les équations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.
Peut-être existe-t-il une solution plus simple ?

Planche 72 $**$ Calculer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$ où $\mathcal{D}$ est donné par $|x|\leq x^2+y^2\leq 1$.

En visualisant le domaine comme le complémentaire de la réunion de deux cercles dans le cercle unité et par des considérations de symétrie : $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}=4\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^1\frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta$.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ puis $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}=\frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$.

Planche 73 $**$ Que dire de $\displaystyle\iint_D\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D=]0,1]\times[0,1]$.

L'intégrale à la même nature que sur $D=]0,1]^2$.

$x\mapsto\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{(1+y)^2}$.

$y\mapsto-\dfrac{1}{(1+y)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1-\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}=-\frac{1}{2}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}$. Par une démarche symétrique $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que $(x,y)\mapsto\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ n'est pas intégrable sur D.

Planche 74 $**$ On considère $f:(x,y)\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+y^{2n}}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Etudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

a) Si $|y|\leq 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge ssi $|x|<1$

Si $|y|>1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge ssi $|x|<|y^2|$ car $\dfrac{x^n}{1+y^{2n}}=\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^n$.

Finalement $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|<\max(1,y^2)\right\}$.

b) $u_n(x,y)=\dfrac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a\in[0,1[$ et $D_a=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|\leq a\max(1,y^2)\right\}$. Pour $(x,y)\in D_a$:

$\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right|=\left|\dfrac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|$

Si $|y|\leq 1$ alors $|x|\leq a$ et $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right|=\left|\dfrac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|\leq\dfrac{na^{n-1}}{1+y^{2n}}\leq na^{n-1}$.

Si $|y|>1$ alors $|x|\leq ay^2$ et $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right|=\left|\dfrac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|\leq\dfrac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}}\leq\dfrac{na^{n-1}}{y^2}\leq na^{n-1}$

Dans les deux cas $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right|\leq na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right|=\left|\dfrac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2}\right|\leq\dfrac{2nx^n}{1+y^{2n}}$ car $\dfrac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}}\leq 1$.

Si $|y|\leq 1$ alors $|x|\leq a$ et $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq\dfrac{2na^n}{1+y^{2n}}\leq 2na^n$.

Si $|y|>1$ alors $|x|\leq ay^2$ et $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq\dfrac{2na^ny^{2n}}{1+y^{2n}}\leq 2na^n$.

Dans les deux cas $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right|\leq 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a\in[0,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D.

Oraux Mines-Ponts Algèbre

Planche 75 $**$ Soit des entiers $a>1$ et $n>0$. Montrer que si a^n+1 est premier alors n est une puissance de 2.

$n=2^k(2p+1)$, $a^n+1=b^{2p+1}-(-1)^{2p+1}=(b+1)c$ avec $b=a^{2^k}$. On en déduit que $b+1\mid n$, or n est supposé premier et $b+1>1$ donc $b+1=n$ puis $p=0$.

Planche 76 $*$ Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/78\mathbb{Z}$?

Les inversibles dans $\mathbb{Z}/78\mathbb{Z}$ sont les classes associés aux entiers de $\{1,\ldots,78\}$ qui sont premiers avec $78=2\times 3\times 13$. Il suffit ensuite de dénombrer les multiples de $2,3,13$ compris entre 1 et 78. On conclut qu'il y a 24 éléments inversible dans $\mathbb{Z}/78\mathbb{Z}$. On peut aussi calculer $\varphi(78)=1\times 2\times 12=24$.

Planche 77 $**$ Déterminer les P de $\mathbb{R}[X]\setminus\{0\}$ tels que $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.

Supposons P solution. Le coefficient dominant de P est égal à 1. Si a est racine de P alors $a^2,a^4,\ldots$ le sont aussi. Or P ne possède qu'un nombre fini de racines donc a est obligatoirement une racine de l'unité, en particulier $|a|=1$. Aussi, si a est racine de P alors $(a+1)^2$ est aussi racine de P et cela permet d'établir que $|a+1|=1$. Les seuls complexes a vérifiant $|a|=|a+1|=1$ sont $a=j$ et j^2. On en déduit que $P=(X^2+X+1)^n$. On vérifie par le calcul qu'un tel polynôme est bien solution.

Planche 78 $*$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F. On suppose que G est de codimension finie dans E. Montrer que $\operatorname{codim}_E G = \operatorname{codim}_E F = \operatorname{codim}_F G$.

G possède un supplémentaire de dimension finie H. Considérons alors K supplémentaire de $H \cap F$ dans H. F et K sont supplémentaires dans E et K est de dimension finie donc F est de codimension finie dans E. De plus, G et $H \cap F$ étant supplémentaires dans F, on peut dire que G est de codimension finie dans F. Enfin la relation $\dim H = \dim K + \dim H \cap G$ se relit $\operatorname{codim}_E G = \operatorname{codim}_E F = \operatorname{codim}_F G$.

Planche 79 $*$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, p dans $\mathbb{N}^*$, $f_1,\dots,f_p$ des formes linéaires sur E. Montrer que $(f_1,\dots,f_p)$ est une famille libre de E^* ssi $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p, \exists x \in E, \forall i \in \{1,\dots,p\}, f_i(x)=\lambda_i$.

Si $(f_1,\dots,f_p)$ est libre on peut compléter cette famille en une base $(f_1,\dots,f_n)$ et si $(e_1,\dots,e_n)$ en désigne la base antéduale alors $x=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_p e_p$ résout le problème.
Inversement si $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p, \exists x \in E, \forall i \in \{1,\dots,p\}, f_i(x)=\lambda_i$ alors sans peine on montre que la famille $(f_1,\dots,f_p)$ est libre en prenant appui sur des x tels que $f_i(x)=\delta_{i,j}$.

Planche 80 $***$ Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$.
Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $PA = BP$. $P = R + iS$ avec $R,S \in M_n(\mathbb{R})$. L'égalité $(R+iS)A = B(R+iS)$ donne $RA = BR$ et $SA = BS$. Malheureusement, on ne sait si R ou S sont inversibles. Cependant pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $(R+\lambda S)A = B(R+\lambda S)$ et $\lambda \mapsto \det(R+\lambda S)$ est une fonction polynomiale non nulle (car ne s'annule pas en $\lambda = i$) donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P = R+\lambda S$ soit inversible. On obtient ainsi A et B semblables sur $\mathbb{R}$.

Planche 81 $*$ Les matrices $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Les deux matrices ont trois valeurs propres distinctes 6, $\dfrac{-3+i\sqrt3}{2}$ et $\dfrac{-3-i\sqrt3}{2}$. Elles sont donc toutes deux semblables à $\operatorname{diag}\left(6,\dfrac{-3+i\sqrt3}{2},\dfrac{-3-i\sqrt3}{2}\right)$ et donc a fortiori semblables entre elles.

Planche 82 $*$ Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k)!}I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k+1)!}A + \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k+2)!}A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(4k+3)!}A^3$ donne

$\exp(A) = \dfrac{\cos(1)+\operatorname{ch}(1)}{2}I_n + \dfrac{\sin(1)+\operatorname{sh}(1)}{2}A + \dfrac{\operatorname{ch}(1)-\cos(1)}{2}A^2 + \dfrac{\operatorname{sh}(1)-\sin(1)}{2}A^3$.

Planche 83 $*$ Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix}0&a&a^2\\1/a&0&a\\1/a^2&1/a&0\end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme minimal de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
c) Calculer e^A.

a) $\chi_A = -(X-2)(X+1)^2$, $E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec $P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

b) Ci-dessus.

c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $\beta = \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3}$

donc $A^n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} A + \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$ puis $\mathrm{e}^A = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \dfrac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} I_3$.

Planche 84 $**$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.
Décrire les sous-espace stables de u.

u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel somme de sous-espace vectoriel des sous-espaces propres de u est stable. Inversement, si F est stable par u alors u_F est diagonalisable et F peut se percevoir comme somme de sous-espace vectoriel des sous-espaces propres de u.

Planche 85 $**$ Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même valeurs propres.

Il est classique d'établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en commençant par établir le résultat pour A inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

Planche 86 $**$ Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $T \in \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $T(g) = f \circ g - g \circ f$.
Montrer que si f est diagonalisable, alors T est diagonalisable ; si f est nilpotente, alors T est nilpotente.

Supposons f diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. Pour $1 \le i, j \le n$, on pose $g_{i,j}$ l'endomorphisme de E déterminé par $g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$. La famille $(g_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ et on observe $T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_k) g_{i,j}$ donc T est diagonalisable.

Supposons f nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Puisque $T^p(g)$ est combinaison linéaire de termes de la forme $f^k \circ g \circ f^{p-k}$, il est assuré que $T^{2n} = 0$ et donc que T est nilpotente.

Planche 87 $***$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $GL(E)$ d'ordre fini n.
Montrer que $\dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\right) = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$.

Soit $p = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} g$. On a $p \circ p = \dfrac{1}{n^2} \sum_{h \in G} \sum_{g \in G} h \circ g = \dfrac{1}{n^2} \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} k = \dfrac{1}{n} \sum_{k \in G} k = p$ donc p est un projecteur et la dimension de $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id})$ est $\operatorname{tr} p = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} g$. Pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p$ donc si x est invariant par p il est aussi par g. Ainsi $\ker(p - \mathrm{Id}) \subset \bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id})$. L'inclusion inverse étant immédiate, on conclut

Il est clair que $\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}) = \ker(p - \mathrm{Id})$ puis l'égalité $\dim\left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\right) = \dfrac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$.

Planche 88 $**$ Soit E un espace euclidien de norme $\|.\|$, u dans $\mathcal{L}(E)$ et $\|.\|_{\mathcal{L}(E)}$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|.\|$.

a) Comparer $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}$ et $\|u^*\|_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, comparer $\ker(u-\mathrm{Id})$ et $\ker(u^*-\mathrm{Id})$.

c) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, montrer $E = \ker(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$.

a) $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(E)}$ (cf. cours). Rappelons que cette relation se démontre en commençant par établir $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}^2 \leq \|u^* \circ u\|_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Soit $x \in \ker(u-\mathrm{Id})$. $\|u^*(x)-x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2(u^*(x) \mid x) + \|x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2(x \mid u(x)) + \|x\|^2 = 0$ car $u(x) = x$.
Ainsi $u^*(x) = x$ et $x \in \ker(u^*-\mathrm{Id})$. On peut conclure $\ker(u-\mathrm{Id}) \subset \ker(u^*-\mathrm{Id})$ puis l'égalité par symétrie.
c) Soit $x \in \ker(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a) - a$.
$u^*(x) = x$ donne $u^*(u(a)) - u^*(a) = u(a) - a$ puis $\left(u^*(u(a)) - u^*(a) \mid a\right) = \left(u(a) - a \mid a\right)$ qui conduit à $\|x\|^2 = \|u(a)\|^2 - 2(u(a) \mid a) + \|a\|^2 = 0$. Ainsi $\ker(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = \{0\}$. De plus, $\dim\ker(u-\mathrm{Id}) + \mathrm{rg}(u-\mathrm{Id}) = \dim E$ donc $\ker(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = E$.

Planche 89 $**$ Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \ker u \Leftrightarrow u + u^* \in GL(E)$.

($\Leftarrow$) Supposons $u + u^*$ inversible.
Soit $x \in \ker u \cap \mathrm{Im}\, u^\perp$. On a $u(x) + u^*(x) = 0$ donc $x = 0$. Par suite $\ker u \cap \mathrm{Im}\, u^\perp = \{0\}$.
Donc $\dim\ker u + \dim \mathrm{Im}\, u^\perp \leq \dim E$ puis $\dim\ker u \leq \dim \mathrm{Im}\, u$. Par suite $\mathrm{Im}\, u = \ker u$.
($\Rightarrow$) Supposons $\mathrm{Im}\, u = \ker u$.
Soit $x \in \ker(u + u^*)$. $u(x) + u^*(x) = 0$.
Or $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ et $u^*(x) \in \mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ donc $u(x) = u^*(x) = 0$.
Par suite $x \in \ker u$ et $x \in \ker u^* = \mathrm{Im}\, u^\perp = \ker u^\perp$ donc $x = 0$.
Par suite $u + u^*$ est injectif donc bijectif.

Planche 90 $*$ Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_n$. Calculer A^2.

Puisque $X^p - 1$ annule A, les valeurs propres de A sont 1 ou -1. Or A est diagonalisable, donc A est semblable à $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots -1)$ puis A^2 est semblable à I_n et donc $A^2 = I_n$.

Planche 91 $**$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique positive ssi il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$. Montrer que A est symétrique définie positive ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Si $A = {}^tPP$ alors il est facile d'établir que A est symétrique positive (voire définie positive si P est inversible). Inversement, si A est symétrique positive alors par le théorème spectral, on peut écrire $A = {}^tQDQ$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$ (voire $\lambda_i > 0$ si A est définie positive). Pour $P = \Delta Q$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ on dispose d'une matrice solution (inversible dans le cas où est définie positive.)

Planche 92 $***$ Montrer que le déterminant d'une matrice symétrique réelle définie positive est majoré par le produit de ses éléments diagonaux.

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\varphi(x,y) = {}^tXMY$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$.
En orthonormalisant pour le produit scalaire φ la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ par le procédé de Schmidt, on

obtient une base $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage P de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. Par changement de base $\varphi(x,y) = {}^tX'Y' = {}^tX\,{}^tPPY$ donne $M = {}^tPP$. D'une part $m_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 \geq p_{i,i}^2$ et d'autre part $\det M = (\det P)^2 = \prod_{i=1}^{n} p_{i,i}^2$ permettent de conclure.

Planche 93 $**$ Soit $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il est impossible que $\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$.
On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Cas $n = 1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que $\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$.
Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.
$(x_2 \mid x_1) < 0$ et $(x_3 \mid x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors $(x_2 \mid x_3) = \lambda\mu \|x_1\|^2 > 0$!
Cas $n = 2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_4$ tels que $\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$.
x_1 étant non nul on peut écrire $\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$ avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
$\forall i \neq j \geq 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i \lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$ donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_{n+3}$ tels que $\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$ à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$.
x_1 étant non nul on peut écrire $\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$ avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
$\forall i \neq j \geq 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i \lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$ donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
$y_2, ..., y_{n+2}$ se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^\perp$ qui est de dimension n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Récurrence établie.

Oraux Mines-Ponts Analyse

Planche 94 $*$ Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Planche 95 $***$ Soit α dans $\mathbb{R}^*$, a et b dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On pose $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} u_n$.
Etudier la nature de la série de terme général u_n et calculer éventuellement sa somme.

On peut supposer $\alpha > 0$ quitte à passer la suite à l'opposé.
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{b-a}{n-b}$. Posons $v_n = n^{a-b} u_n$. $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(1/n^2\right)$ donc $(\ln v_n)$ converge puis $u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$ avec $A > 0$.
Par conséquent $\sum u_n$ CV ssi $b - a > 1$.

$(n-b)u_{n+1}=(n-a)u_n$ donc $(n+1)u_{n+1}-nu_n=(b+1)u_{n+1}-au_n$. En sommant et en notant $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, on obtient $(b+1)(S-\alpha)-aS=0$ donc $S=\dfrac{(b+1)\alpha}{b+1-a}$.

Planche 96 $**$ Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(t+ib)^2}\mathrm{d}t$.

$1+(t+ib)^2=(t+i(b+1))(t+i(b-1))$.
Si $b=\pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b\neq\pm 1$ alors la fonction $f:t\mapsto\dfrac{1}{1+(t+ib)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t)=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t\to\pm\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $b=\pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2)+\arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A}-\frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2)+\arctan\left(\frac{t}{b-1}\right)\right]_{-A}^{A}.$$

Si $|b|>1$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=0$. Si $|b|<1$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+ib)^2}=\pi$.

Planche 97 $**$ Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)t^n\mathrm{d}t=0$.

a) Montrer que $f=0$.

b) Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-(1-i)x}\mathrm{d}x$. Calculer I_n .

c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n f(x)\mathrm{d}x=0$.

a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_\infty\leq\varepsilon$.
$0\leq\int_a^b f^2=\int_a^b f(f-P)+\int_a^b fP=\int_a^b f(f-P)\leq(b-a)\|f\|_\infty\varepsilon$. En faisant $\varepsilon\to 0$, on obtient $\int_a^b f^2=0$ et donc $f=0$.

b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties, $(n+1)I_n=(1-i)I_{n+1}$. Or $I_0=\dfrac{1+i}{2}$ donc $I_n=\dfrac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}}n!$.

c) $I_{4p+3}\in\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{4p+3}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}u^p\sin(u^{1/4})\mathrm{e}^{-u^{1/4}}\mathrm{d}u=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Planche 98 $**$ Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\sum|a_n|$ converge. Si $a=(a_n)_{n\geq 0}$ appartient à E , on pose $\|a\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

a) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E .

b) Soit $F=\left\{a\in E,\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1\right\}$. L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?.

a) Cf. cours.
b) Supposons $(a_n^p)\in E\to(a_n)$. $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^p-\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n^p-a_n|\to 0$ donc $(a_n)\in E$ et E est fermé.
Soit $a=(a_n)\in E$ (il en existe). Posons $e=(1,0,0,\ldots)$. $\forall\alpha>0$, $a+\alpha e\notin E$ et $\|a-(a+\alpha e)\|=\alpha$ donc

$\overline{B}(a,\alpha)\not\subset E$ et E n'est pas ouvert.

Posons $\alpha^p=(p+1,-p,0,0,\dots)$. $\alpha^p\in E$ et $\left\|\alpha^p\right\|\to+\infty$ donc E n'est pas borné.

Planche 99 $**$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f=\left\{(x,f(x)),x\in\mathbb{R}\right\}$ le graphe de f.

a) Montrer, si f est continue, que G_f est fermé.

b) Si f est bornée et si G_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, montrer que f est continue.

c) Le résultat du b) subsiste-t-il si f n'est pas bornée ?

a) Immédiat par la caractérisation séquentielle des parties fermée.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f n'est pas continue en a.
$\exists\varepsilon>0,\forall\alpha>0,\exists x\in\mathbb{R},\left|x-a\right|\le\alpha$ et $\left|f(x)-f(a)\right|>\varepsilon$.

Cela permet de construire $(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n\to a$ et $\left|f(x_n)-f(a)\right|>\varepsilon$.

La suite réelle $(f(x_n))$ est, on peut donc en extraire une suite convergente $f(x_{\varphi(n)})$. Notons b sa limite. Comme $\forall n\in\mathbb{N},\left|f(x_{\varphi(n)})-f(a)\right|>\varepsilon$, à la limite $\left|b-f(a)\right|\ge\varepsilon$ et donc $f(a)\ne b$. Or $(x_{\varphi(n)},f(x_{\varphi(n)}))\to(a,b)$, $(x_{\varphi(n)},f(x_{\varphi(n)}))\in G_f$ et $(a,b)\notin G_f$ donc G_f n'est pas fermé. Absurde.

c) Non, on obtient un contre-exemple avec $f(x)=1/x$ si $x\ne0$ et $f(0)=0$.

Planche 100 $**$ a) Déterminer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\ge0}\frac{n!}{1\times3\times\cdots\times(2n+1)}x^n$.

b) Pour $x\in\left]-R,R\right[$ calculer la somme précédente.

a) Posons $a_n=\dfrac{n!}{1\times3\times\cdots\times(2n+1)}\ne0$. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{2n+3}\to\dfrac12$. $R=2$.

b) On sait que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t=\frac{2^n n!}{1\times3\times\cdots\times(2n+1)}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$.

Par convergence uniforme, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin t}{2-x\sin^2 t}\mathrm{d}t$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{(2-x)+x\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$ puis

si $x>0$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}$.

Si $x<0$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}$.

Planche 101 $**$ Si $x>1$, on pose $\displaystyle\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x\to+\infty$.

b) Pour quels réels x la série $\displaystyle\sum\frac{\zeta(n)}{n}x^n$ converge-t-elle ?.

c) Si $\displaystyle F(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta(n)}{n}x^n$, montrer que F est continue sur $\left[-1,1\right[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-1,1\right[$.

d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

a) $\zeta(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$.
b) Le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
Pour $x=1$, il y a divergence car $\dfrac{\zeta(n)}{n}\sim\dfrac1n$.
Pour $x=-1$, il y a convergence en vertu du CSSA sachant que la suite $\zeta(n)$ est décroissante positive.

c) Par les séries entières, F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Par application du CSSA permettant une majoration du reste, on établir la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[-1,0]$ et donc la continuité de sa somme en -1.

d) Pour $x \in]-1,1[$, $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}$.

On peut permuter les deux sommes car $\sum_{p\geq 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ CV et $\sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ CV.

$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-x}\right)$ et on ne peut faire plus simple.

Planche 102 $**$ Pour $x \in]-1,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{-i\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1} \text{ pour } |x|<1.$$
Par intégration de série entière, on obtient la relation proposée.

Planche 103 $*$ Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Etudier la limite de $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée (f est bornée) pour obtenir $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \to f(0)$.

Planche 104 $*$ Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\,\mathrm{d}x$.

$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right| \leq \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1 = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Quand $n\to+\infty$, $\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \to -\infty$ car $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \sim \frac{x}{k}$ terme général s'une SATP divergente.

Par suite $\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)} \to 0$ puis par le théorème de convergence dominée $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\,\mathrm{d}x = 0$.

Planche 105 $**$ Soit $\Omega = \{z\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}z > -1\}$. Si $z\in\Omega$, soit $f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et continue sur Ω.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1.
c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}z\to+\infty$.

a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}(z)\geq a\}$.

$t\mapsto\frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, $z\mapsto\frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z\in\Omega_a$,

$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0,1]$ donc f est définie et continue sur Ω.

b) $f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$ et $f(x+1)\xrightarrow[x\to-1]{}f(0)$ donc $f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$.

c) Par intégration par parties : $(z+1)f(z)=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\int_0^1\dfrac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ et $\left|\displaystyle\int_0^1\dfrac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right|\le\displaystyle\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\mathrm{d}t\le\dfrac{1}{\mathrm{Re}(z)+2}\to 0$.

Planche 106 $***$ Existence et calcul de $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$t\mapsto\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, $x\mapsto\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in[-a,a]$

$\left|\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right|\le\dfrac{\left|\ln(a^2+t^2)\right|+\left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2}=\varphi(t)$ avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right)=\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$.

$t\mapsto\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, $x\mapsto t\mapsto\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

pour $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right|\le\dfrac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}=\psi(t)$ avec ψ intégrable. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $x\neq1$, $\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}=\dfrac{2x}{x^2-1}\left(\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{x^2+t^2}\right)$ donc $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{x+1}$.

En procédant au changement de variable $u=1/t$, on obtient $f(0)=0$ et donc on peut conclure

$f(x)=\pi\ln(x+1)$ pour $x\in\mathbb{R}^+$ en exploitant un argument de continuité.

Planche 107 $***$ Pour $x\in\mathbb{R}^+$, soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$.

a) Justifier la définition de $f(x)$.

b) Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Calculer $f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^{+*}$.

d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

a) Pour $x>0$, $t^2\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donne l'intégrabilité de $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}$.

Pour $x=0$, il est connu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente bien que $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

b) Pour $x\in[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right)\right|\le\mathrm{e}^{-ax}=\varphi(x)$ avec φ intégrable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et conclure que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

c) Pour $x>0$, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\mathrm{d}t\right)=-\dfrac{1}{x^2+1}$ donc $f(x)=C-\arctan x$.

Or $|f(x)|\le\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $C=\dfrac{\pi}{2}$.

d) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$. Posons $u_n(t)=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$. Par application du CSSA, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f, est continue en 0. On peut conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

Planche 108 $***$ Soit α un réel non entier.

a) En utilisant la fonction 2π -périodique coïncidant avec $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi,\pi]$, calculer

$$1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

c) Ici $0<\alpha<1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$.

a) La fonction 2π -périodique étudiée est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont développable en série de Fourier.

$a_n=\dfrac{2\alpha(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$ et $b_n=0$. La valeur en 0 de ce développement permet d'établir :

$$1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}=\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

b) Par convergence normale, la fonction $\alpha\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\alpha^2}$ est continue sur $[0,1/2]$. En passant à la limite quand $\alpha\to 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}-1\right)\right)=-\frac{\pi^2}{12}$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t$,

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha-1+n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-1)^n t^{\alpha-1+n}\mathrm{d}t+\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha-1+n}\mathrm{d}t.$$

Par le CSSA, $\displaystyle\left|\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n t^{\alpha-1+n}\mathrm{d}t\right|\le\int_0^1 t^{\alpha+N}\mathrm{d}t=\frac{1}{N+\alpha+1}\to 0$ donc

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n t^{\alpha-1+n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}.$$

Par $u=1/t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u^{-\alpha}}{u+1}\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$ par la même démarche qu'au dessus.

Par suite $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

Planche 109 $*$ Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases}x'=y+z\\y'=x\\z'=x+y+z\end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,2,0\}$, $E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_2(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $E_0(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&1\\0&3&-1\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix}\lambda e^{-t}\\\mu e^{2t}\\\nu\end{pmatrix}$, $\begin{cases}x(t)=-\lambda e^{-t}+2\mu e^{2t}\\y(t)=\lambda e^{-t}+\mu e^{2t}+\nu\\z(t)=3\mu e^{2t}-\nu\end{cases}$.

Planche 110 $**$ Résoudre l'équation $(x^2+1)y''+xy'-y=0$.

L'espace des solutions est de dimension 2. $y(x)=x$ est solution immédiate. Par la méthode de Lagrange (et quelques déterminations de primitives non triviales) on obtient aussi $y(x)=\sqrt{x^2+1}$ ce qui fournit un système fondamental de solutions

Planche 111 $**$ a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Trouver les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ telles que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha f$.

b) Trouver toutes les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ telles que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}$.

---

a) On passe en coordonnées polaires avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\arctan\dfrac{x}{y}$ de sorte que $x=r\sin\theta$ et $y=r\cos\theta$.

On parvient à $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha/2}+C(x/y)$ avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Idem, on parvient à $f(x,y)=\dfrac{2}{3}\dfrac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}+C\left(x/y\right)$ avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Planche 112 $***$ Soit $k\in\left]0,1\right[$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\left|f'(x)\right|\le k$.

On définit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(y+f(x),x+f(y))$.

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow\begin{cases}y+f(x)=a\\x+f(y)=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+f(b-f(y))=a\\x=b-f(y)\end{cases}$.

Considérons $\varphi_b:y\mapsto y+f(b-f(y))$. φ est continue dérivable et $\varphi_b'(y)=1-f'(y)f'(b-f(y))$ donc $\varphi_b'(y)>0$ car $\left|f'(y)f'(b-f(y))\right|\le k^2<1$. Par conséquent φ est strictement croissante. De plus f étant k lipschitzienne : $\left|f(t)-f(0)\right|\le k\left|t\right|$ donc $\left|f(t)\right|\le k\left|t\right|+\left|f(0)\right|$ puis $\left|f(b-f(y))\right|\le k\left|b-f(y)\right|+\left|f(0)\right|\le k^2\left|y\right|+\ell$ par suite $\varphi_b(y)\ge(1-k^2)y-\ell\xrightarrow[y\to+\infty]{}+\infty$ et $\varphi_b(y)\le(1-k^2)y+\ell\xrightarrow[y\to-\infty]{}-\infty$ donc φ_b réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Par conséquent : $\varphi(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow\begin{cases}y=\varphi_b^{-1}(a)\\x=b-\varphi_b^{-1}(a)\end{cases}$.

Finalement, l'application φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $\operatorname{Jac}\varphi_{(x,y)}=\begin{pmatrix}f'(x)&1\\1&f'(y)\end{pmatrix}$ et $\det(\operatorname{Jac}\varphi_{(x,y)})=f'(x)f'(y)-1\neq$ car $\left|f'(x)f'(y)\right|\le k^2<1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Planche 113 $*$ Soit $a>0$. On pose, pour $x>0$ et $y>0$, $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{a}{xy}$.

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Soit $x>0$ fixé.

L'application $y\mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $2y-\dfrac{a}{xy^2}$, elle donc minimale et $y=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2x}}$.

Considérons $g:x\mapsto f(x,\sqrt[3]{\dfrac{a}{2x}})=x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{x^2}}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+*$ et $g'(x)=2x-\dfrac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^{8/3}=2^{1/3}a^{2/3}\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\dfrac{a}{2}}$.

g est minimale pour $x=\sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2},\sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Planche 114 $*$ Soit $I_n=\displaystyle\iint_{[0,1]^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^n+y^n}$. Déterminer la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

$$\left|I_n-1\right|=\iint_{[0,1]^2}\frac{x^n+y^n}{1+x^n+y^n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\iint_{[0,1]^2}(x^n+y^n)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{n+1}\to0.$$

Planche 115 $**$ On considère $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Soit $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par $\forall r\in\mathbb{R}^+,\ \varphi(r)=\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que φ est dérivable.

b) Calculer φ' et en déduire φ. On pourra interpréter $r\varphi'(r)$ comme la circulation d'une forme différentielle sur un contour simple.

c) Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre 0 et de rayon R. Quelle est la valeur de $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

---

a) $g:(r,t)\mapsto f(r\cos t, r\sin t)$ est $\mathcal{C}^1$ donc g et $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ et φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) $\varphi'(r)=\int_0^{2\pi}\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

En notant Γ le cercle de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct et $\mathcal{D}$ le disque correspondant,

$$r\varphi'(r)=\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x=\iint_{\mathcal{D}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

On en déduit $\varphi'(r)=0$ pour $r\neq 0$, puis par continuité pour tout $r\in\mathbb{R}$.

Par suite la fonction φ est constante égale à $\varphi(0)=2\pi f(0,0)$.

c) $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^R\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\pi R^2 f(0,0)$.

Planche 116 $***$ Soit O,A,B les points d'affixes respectives $0, r, r\exp(i\pi/4)$ avec $r>0$. Soit Γ_r l'arc paramétré de $\mathbb{C}$ constitué du segment $[O,A]$, orienté de O vers A, de l'arc $\mathcal{C}_r$ du cercle de centre O et de rayon r d'origine A et d'extrémité B et du segment $[B,O]$ orienté de B vers O.

a) Calculer $I_r=\int_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$.

b) Que dire de la limite de $J_r=\int_{\mathcal{C}_r}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$ quand $r\to+\infty$?

c) Qu'en déduire ?

---

a) $\int_{\Gamma_r}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=\int_{\Gamma_r}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ avec $P(x,y)=iQ(x,y)=\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}$.

Or $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-2i(x+iy)\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ donc $\int_{\Gamma_r}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=0$.

b) $J_r=\int_{\mathcal{C}_r}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2(\cos t+i\sin t)^2}(\sin t-i\cos t)\mathrm{d}t$

donc $|J_r|\leq\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2u}\mathrm{d}u\underset{\sin t\geq\frac{2}{\pi}t}{\leq}\int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\mathrm{d}u=\left[\dfrac{4}{\pi r}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\right]_0^{\pi/4}\to 0$..

c) $\int_{[O,A]}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_{[B,O]}\mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=-\int_0^r\mathrm{e}^{-it^2}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t$.

Sachant que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^r\cos t^2+\sin t^2\mathrm{d}t=\sqrt{\pi/2}$ et $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^r\cos t^2-\sin t^2\mathrm{d}t=0$

d'où l'on conclut $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^{+\infty}\cos t^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{r\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Oraux Mines-Ponts Géométrie

Planche 117 $*$ Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{iy}+\mathrm{e}^{iz}=0$. Montrer que $\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{2iy}+\mathrm{e}^{2iz}=0$.

Puisque $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$, on a $1+e^{i\alpha}+e^{i\beta}=0$ avec $\alpha=y-x$ et $\beta=z-x$.

Ainsi $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-1\\ \sin\alpha+\sin\beta=0\end{cases}$.

$\sin\alpha+\sin\beta=0$ donne $\alpha=-\beta\ \ [2\pi]$ ou $\alpha=\pi-\beta\ \ [2\pi]$.

Si $\alpha=\pi-\beta\ \ [2\pi]$ alors la relation $\cos\alpha+\cos\beta=-1$ donne $0=-1$.

Il reste $\alpha=-\beta\ \ [2\pi]$ et alors $2\cos\alpha=-1$ donne $\alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}\ \ [2\pi]$.

Par suite $e^{i\alpha}=j$ ou j^2.

On obtient alors aisément $1+e^{2i\alpha}+e^{2i\beta}$ puis $e^{2ix}+e^{2iy}+e^{2iz}=0$.

Planche 118 $**$ Soit E un espace euclidien de dimension 3, r une rotation et s une symétrie orthogonale. Reconnaître $s\circ r\circ s$.

Pour fixer les idées : $r=\text{Rot}_{u,\theta}$. $s\circ r\circ s$ est un automorphisme orthogonal de E et $\det(s\circ r\circ s)=1$ donc $s\circ r\circ s$ est une rotation. On observe $(s\circ r\circ s)(s(u))=s(u)$ donc $s\circ r\circ s$ est une rotation d'axe dirigé et orienté par u. $\text{tr}(s\circ r\circ s)=\text{tr}(r\circ s\circ s)=\text{tr}\, r$ et si v est un vecteur non colinéaire à u,
$\text{Det}(s(u),s(v),(s\circ r\circ s)(s(v)))=-\text{Det}(u,v,r(v))$ donc $s\circ r\circ s$ est une rotation d'angle $-\theta$. Finalement, $s\circ r\circ s=\text{Rot}_{s(u),-\theta}$.

Planche 119 $**$ Soit f et g dans $SO_3(\mathbb{R})$ tels que $f\neq g$ et $g\circ f=f\circ g$. Montrer que f et g sont soit deux rotations de même axe, doit deux symétries de droites orthogonales.

f et g sont des rotations vectorielles et puisque $f\neq g$, on peut supposer, quitte à échanger, que $f\neq\text{Id}$.
Si u dirige l'axe de f alors $f(g(u))=g(f(u))=g(u)$ donc $g(u)$ appartient à l'axe de f puis $g(u)=\lambda u$. Or g est une isométrie donc $g(u)=\pm u$. Si $g(u)=u$ alors g est une rotation de même axe que f. Si $g(u)=-u$ alors v un vecteur unitaire de l'axe de la rotation g. On a $(u\mid v)=(g(u)\mid g(v))=(-u\mid v)=-(u\mid v)$ donc $(u\mid v)=0$. Les axes de f et g sont donc orthogonaux. De plus, puisque $u\in\{v\}^{\perp}$ et $g(u)=-u$, g est un demi-tour et il en est de même pour f.

Planche 120 $*$ Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $\rho=a(1+\cos\theta)$.

$\rho'(\theta)=-\sin\theta$, $\dfrac{ds}{d\theta}=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$. $L=2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a$

Planche 121 $**$ Soit C la courbe d'équation polaire $\rho=\sqrt{\cos(2\theta)}$.
a) Tracer C.
b) Calculer la courbure aux points où elle est définie.
c) Calculer l'aire délimitée par la courbe C.

a) Une lemniscate de Bernoulli.
b) $\dfrac{ds}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\alpha=\theta+V$, $\begin{cases}\cos V=-\sin 2\theta\\ \sin V=\cos 2\theta\end{cases}$, $V=\pi/2+2\theta$ puis $\gamma=\dfrac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2}}$.
c) $\mathcal{A}=2\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta=1$

Planche 122 $*$ Etudier la conique d'équation $x^2+3xy+2y^2-x-2y+1=0$.

$A=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 2\end{pmatrix}$ de valeurs propres $\dfrac{3\pm\sqrt{10}}{2}$. C'est une conique à centre. Par annulation des dérivées partielles, le centre est $\Omega\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$. On obtient pour équation réduite $\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}x^2-\dfrac{\sqrt{10}-3}{2}y^2+1=0$. C'est une hyperbole.

Planche 123 $**$ Soit r dans $\mathbb{R}^{+*}$. Dans le plan euclidien P, soient A et A' deux points tels que $\left\|\overrightarrow{AA'}=3r\right\|$, $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) le cercle de centre A (resp. A') et de rayon r (resp. $2r$).
Décrire $\left\{M \in P; \mathrm{d}(M,\mathcal{C}) = \mathrm{d}(M,\mathcal{C}')\right\}$.

$\mathrm{d}(M,\mathcal{C}) = |AM - r|$ et $\mathrm{d}(M,\mathcal{C}') = |A'M - 2r|$.

Si un point M est égal à distance de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, la configuration géométrique en cours impose que ce point est extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et au cercle $\mathcal{C}'$. On a alors $\mathrm{d}(M,\mathcal{C}) = AM - r$ et $\mathrm{d}(M,\mathcal{C}') = A'M - 2r$. Par suite $\mathrm{d}(M,\mathcal{C}) = \mathrm{d}(M,\mathcal{C}') \Leftrightarrow A'M - AM = r$. L'ensemble $\left\{M \in P; \mathrm{d}(M,\mathcal{C}) = \mathrm{d}(M,\mathcal{C}')\right\}$ apparaît donc comme une branche d'hyperbole. Plus précisément, c'est la branche contenant A d'une hyperbole de foyers A et A'. Pour cette hyperbole, $a = r/2$ et $c = 3r/2$.