Sujets d'oral de math posés par M.AHRAR_session 2008

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 001\,/\,08}}$

Exo 1

m étant un paramètre réel, résoudre le système linéaire : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases}$.

Exo 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1) Montrer que f définit une application continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi$. (voir que $\left[t > 0 \mapsto \frac{2x}{x^2+t^2} \right]$ est décroissante pour $x > 0$)

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 002\,/\,08}}$

Exo 1

Soit $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad tq \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ et } ad-bc=1 \right\}$

1) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2) Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer S^2 ; TST ; et T^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) Soit G le sous groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \in G$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on pose : $f(M) = inf(|a|,|b|,|c|,|d|)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer U_nM ; T^nM ; MU_n ; MT^n.

b) Montrer par récurrence sur $f(M)$ que $M \in G$.

c) Conclure.

Exo 2

Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3\ (1-x)}}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 003\ /\ 08}}$

Exo 1

Calculer le réel $\alpha = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 x^2(\ln(x) - ax - b)^2 dx$.

(Penser à considérer un espace préhilbertien $C([0,1],\mathbb{R})$, muni d'un produit scalaire convenablement choisi).

Exo 2

Rayon de convergence et somme des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ avec :
$a_n = \frac{\cos(na)}{n!(\sin(a))^n}$ et $b_n = \frac{\sin(na)}{n!(\sin(a))^n}$. $(a \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}\ ,\ n \geq 0)$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 004\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit (C) la courbe définie en polaire par : $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $a > 0$, donné.

1) Construire (C).

2) Montrer que la longueur de la courbe (C) est $a\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Exo 2

Étudier la convergence des séries de termes généraux :
$(u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}\ ,\ n \geq 2)$; $(v_n = \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}}\ ,\ n \geq 1)$; $(w_n = \frac{\ln(n)^n}{n^\alpha},\ n \geq 1)$. α réel donné.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 005\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver les couples $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pour lesquels $aX^{n+1} + bX^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exo 2

1) Vérifier que $\frac{1}{1+u^2} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{u^{2n+2}}{1+u^2}$.

2) Montrer que l'application $[u \mapsto \frac{\ln(u)}{1+u^2}]$ est intégrable sur $]0,1]$.

3) En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} = \alpha$.

4) Soit $x \geq 1$, calculer $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)\sqrt{1+t^2}}$.

5) Vérifier que g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et calculer $\int_1^{+\infty} g(u)du$ en fonction de α.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 006 / 08}}$

Exo 1

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa base canonique.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

2) Vérifier que pour $n \geq 1$, $\deg(T_n) = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

3) Montrer que la relation $(P/Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur E.

4) Vérifier que l'orthonormalisé de la base canonique de E par le procédé de Schmidt est la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $U_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T_n$.

Exo 2

Développer en série entière la fonction $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et en déduire une valeur approchée à 10^{-3} prés de $\alpha = \int_0^1 e^{-t^2} dt$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 007 / 08}}$

Exo 1

Soit (C) la courbe définie en polaire par : $r = th(\frac{\theta}{2})$

1) Construire (C).

2) Chercher l'abscisse curviligne d'origine $(\theta_0 = 0)$ de (C).

3) Chercher le centre de courbure au point de coordonnées polaires r et θ, conclure.

Exo 2

Rayon de convergence et somme des séries entières $\sum S_n x^n$ et $\sum (-1)^n S_n x^n$ avec :
$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 008 / 08}}$

Exo 1

Soit (S) la surface d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et δ un réel positif.

Trouver l'ensemble (C) des points M de (S) tels que la distance de O au plan tangent à (S) au point M est δ.

Quelle est la projection orthogonale de (C) sur le plan (xOy).

Exo 2

Montrer que la série de terme génèral $u_n = \frac{4n}{n^4+2n^2+9}$, est convergente et calculer sa somme.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 009 / 08}}$

Exo 1

Trouver tous les polynômes P, Q de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
$X(X-1)P + (X+1)Q = X^2$.

Exo 2

Montrer que $[t \mapsto \frac{t}{e^t-1}]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 010 / 08}}$

Exo 1

Quelle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion du plan $P = vect(e,f)$ où $e = (1,1,0)$ et $f = (1,1,1)$.

Exo 2

On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n$.

1) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

2) Montrer que $2f = (1+4x)f'$ et en déduire f.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 011 / 08}}$

Exo 1

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

Exo 2

Montrer la convergence de la série de terme génèral : ($u_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(2\cos(x))^n}$, $n \geq 0$) et calculer sa somme.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 012 / 08}}$

Exo 1

Soit n un entier ≥ 2, $P(X) = (X+1)^n - X^n - \lambda \in \mathbb{C}[X]$.
Déterminer les valeurs de λ pour lesquels P admet des racines de multiplicité ≥ 2.

Exo 2

1) Montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $0 \leq \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{(1+t^2|\sin(t)|)^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^{\pi} \frac{dt}{(1+n^2\pi^2\sin(t))^{\frac{3}{2}}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+n^2\pi^2\sin(t))^{\frac{3}{2}}}$

3) En déduire que l'application $\left[t \to \frac{1}{(1+t^2|\sin(t)|)^{\frac{3}{2}}} \right]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET} \quad 013 / 08}}$

Exo 1

Mettre sous forme de produit de facteurs les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) \\ 1 & \cos(y) \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 1 & \cos(y) & \cos(2y) \\ 1 & \cos(z) & \cos(2z) \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) \\ 1 & \cos(x_4) & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) \end{vmatrix}$$

Généraliser ces résultats à un déterminant d'ordre n.

Exo 2

Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $f \in E \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Soit $T : E \to E$ l'application définie par : $\forall f \in E \quad T(f)$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

Montrer que T est linéaire continue et calculer sa norme.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET} \quad 014 / 08}}$

Exo 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Calculer le polynôme minimal de A et en déduire $A^{-1},\ A^3,\ A^5$.

Exo 2

Existence et calcul de l'intégrale impropre : $\int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \ln(\frac{1+t}{1-t})dt$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET} \quad 015 / 08}}$

Exo 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(i) Écrire A^p $(p \in \mathbb{N})$ comme combinaison linéaire de I_3, A, et A^2.

(ii) Calculer $\exp(A)$.

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1. \quad (*)$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f''(x) = 0$.

b) Déterminer toutes les applications de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

$\mathbb{SUJET}$ 016 / 08

Exo 1

Soit u l'endomophisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Donner la nature et les caractéristiques géomètriques de u.

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière :

$\sum a_n x^n$ avec $a_n = n^{[(-1)^n]},\ n \geq 0.$

$\mathbb{SUJET}$ 017 / 08

Exo 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \int_0^1 (\sqrt{t} - xt - y)^2 dt.$

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f admet un unique minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ qu'on déterminera.

Exo 2

Nature et somme de la série numérique de terme génèral : $u_n = \frac{1}{ch(nx).ch((n+1)x)}$.

On pourra remarquer que : $sh(x) = sh((n+1)x - nx)$.

$\mathbb{SUJET}$ 018 / 08

Exo 1

En munissant $\mathbb{R}_2[X]$ d'un produit scalaire convenablement choisi, calculer le réel :
$\alpha = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt.$

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière : $\sum a_n x^n$ avec $\frac{n^3+n+3}{n+1}$, $n \geq 0$.

$\underbrace{\overbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 019 / 08}}$

Exo 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1) On pose : $F = [0,1] \times [0,1]$, justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure. On pose alors $M = \sup\limits_{(x,y)\in F} f(x,y)$.

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) On suppose que la borne supérieure est atteinte en un point (a,b) de l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$.
Montrer alors que $f(a,b) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

4) Calculer les réels $\alpha = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(0,x)$ et $\beta = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(1,x)$.

5) Comparer les réels α et β à $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. (On pourra utiliser la calculatrice).

6) En remarquant que $f(x,y) = f(y,x)$ déduire la valeur de M.

Exo 2

Quelle est l'équation de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur $e = (0,0,1)$ et la droite d'quation :

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y+2z = 0 \end{cases}.$$

$\underbrace{\overbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 020 / 08}}$

Exo 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Reconnaitre f et ses caractéristiques géomètriques.

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière : $\sum a_n x^n$; $\left(a_n = \frac{1}{(n+1)(n-2)}\ ,\ n \geq 3\right)$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 021\ /\ 08}}$

Exo 1

Soient (P) un plan affine réel muni d'un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$, et f l'application affine représentée analytiquement par : $\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 4x - 5y - 2 \end{cases}$.

1) Trouver l'ensemble des points invariants par f.
2) Trouver l'ensemble des droites invariantes par f.
3) Soit D la droite d'équation : $x + y + 3 = 0$.
  a) Trouver $f^{-1}(D)$.
  b) Trouver l'ensemble des points M de D tels que $f(M) \in D$.

Exo 2

Étudier la convergence des séries de termes généraux :
$(u_n = \sin(\frac{1}{n}) + a\tan(\frac{1}{n}) + b\ln(\frac{n+1}{n-1})\ ,\ n \geq 2)$, a, b réels donnés.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 022\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Diagonaliser la matrice A et trouver les sous espaces propres de u.
2) Déterminer les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Exo 2

Si $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose : $u_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } m = n \\ \frac{1}{m^2 - n^2} \text{ si } m \neq n \end{cases}$.

a) Montrer que pour $m \neq 0$ on a : $\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = -\frac{3}{4m^2}$.

b) Calculer $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} \right)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n} \right)$.

c) La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est -elle sommable ?

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 023\ /\ 08}}$

Exo 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \pounds(E)$ de matrice A dans la base canonique.

1) Montrer que A n'est pas diagonalisable et déterminer $\ker(f - id)^2$.

3) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Exo 2

Existence et calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(2t)\ln(\tan(t))dt$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 024 / 08}}$

Exo 1

m étant un paramètre réel, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

Exo 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation différentielle :

$(E_n) \qquad (n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0.$

Soit y_n la solution de (E_n) vérifiant : $y_n(0) = 0$ et $y_n'(0) = 1$.

1) Montrer que la suite (y_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour $u \leq 0,$ on a : $0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2}$.

3) En déduire que la suite (y_n) converge uniformément sur tout $[0,w]$, $w > 0$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 025 / 08}}$

Exo 1

Résoudre le système différentiel : $(S) \quad \begin{cases} x' = x + y + \sin(t) \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

d'inconnues x et y deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$.

Indication :

On commencera par résoudre le système homogène aprés réduction de sa matrice.

Exo 2

Calculer $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+e^{n\pi}\sin(x)}$ et étudier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x\,|\sin(x)|}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 026\ /\ 08}}$

Exo 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et soient les polynômes :

$q_1(X) = \frac{1}{4}(X+1)^2$; $q_2(X) = -\frac{1}{4}(X^2+2X-3)$; $q_3(X) = \frac{1}{2}(1-X^2)$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

2) Soit $w : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$

$$P \mapsto w(P) = (P(1), P(-1), P'(-1))$$

a) Montrer que w est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et en déduire que (q_1, q_2, q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer en fonction de P et P' les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que : $P(X) = \alpha_1 q_1(X) + \alpha_2 q_2(X) + \alpha_3 q_3(X)$.

c) Montrer que pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ on a : $f(A) = f(1)q_1(A) + f(-1)q_2(A) + f'(-1)q_3(A)$.

3) On note E la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[A]$, donner la dimension et une base de E.

Exo 2

Résoudre l'équation différentielle : (E) $y'' - 3y' + 2y = t.ch(t)$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 027\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale $n \geq 1$ muni d'une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on munit E d'une norme $\|.\|$ et on munie $\pounds(E)$ de la norme subordonnée à celle de E, qu'on notera : $|||.|||$

Soit $u \in \pounds(E)$ pour tout entier naturel p on pose : $s_p(u) = \sum_{k=0}^{p} \frac{u^k}{k!}$

1) Montrer que la suite $(s_p(u))_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On note $\exp(u) = \lim_{p\to\infty} s_p(u)$ dite exponentielle de u qu'on note : $\exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$.

2) Soient F le sous espace vectoriel de $\pounds(E)$ donné par : $F = vect(\{u^p\ ;\ p \in \mathbb{N}\})$

Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) \leq n$.

3) Montrer que $\exp(u)$ est un polynôme en u de degré $\leq n-1$.

càd : $\exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tq $\exp(u) = P(u)$.

4) Exprimer ce qui précède en terme matriciel.

Exo 2

Trouver les primitives de $g(x) = \frac{x^7}{(x^4-1)(x^2+2)}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 028\ /\ 08}}$

Exo 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1) Diagonaliser A et calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) À quelle condition A est-elle inversible ?
On suppose que A est inversible, calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exo 2

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E$, on pose : $N_1(f) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ et $N_2(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt$.

Pour $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$ on pose : $f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2) Étudier la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans (E, N_1) et dans (E, N_2). Que peut-on conclure ?

SUJET 029 / 08

Exo 1

Résoudre le système différentiel : $(S) \begin{cases} x' = 3x + y - 2 \\ y' = x + y + 2z \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$

d'inconnues x, y, et z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Indication :
On commencera par réduire la matrice de ce système.

Exo 2

Discuter selon $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, l'existence de l'intégrale impropre :
$I = \int_1^{+\infty} (x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - a - bx - \frac{c}{x}) dx$
Calculer I en cas d'existence.

SUJET 030 / 08

Exo 1

Soient $A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

a) Montrer que $\ker(f) \perp \operatorname{Im}(f)$.

b) Écrire la matrice de f dans une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ formée d'une base $\ker(f)$ et d'une base de $\operatorname{Im}(f)$ et en déduire la nature géomètrique de f.

Exo 2

Résoudre l'équation différentielle : $(E)\ y'' - 3y' + 2y = t.sh(t)$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 031 / 08}}$

Exo 1

λ étant un paramètre réel, calculer le rang de la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Dans le cas où C est inversible, calculer C^{-1}.

Exo 2

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 032 / 08}}$

Exo 1

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer B^n et $\exp(B)$.

(On utilisera deux methodes dont l'une reposant sur la diagonalisation de B)

Exo 2

On se propose d'étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{(1+t^2|\sin(t)|)^{3/2}}.$$

1) Montrer que : $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi}u \leq \sin(u)$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{du}{(1+n^2\pi^2\sin(u))^{3/2}}$.

3) En déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

4) Montrer que $f(t) = \frac{1}{(1+t^2|\sin(t)|)^{3/2}}$ définit une application intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 033 / 08}}$

Exo 1

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^5 - 1$.
En déduire les valeurs de $\cos(\frac{2k\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2k\pi}{5})$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exo 2

Pour x réel, on définit : $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
1) Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $f + g^2$ est constante.
3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 034 / 08}}$

Exo 1

1) Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Donner un polynôme annulateur de A qui est de degré 2.
3) Trouver pour tout entier naturel n deux coefficients a_n, b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n I_3$.

Exo 2

Discuter selon $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, l'existence de l'intégrale impropre :
$J = \int_1^{+\infty} \left[\frac{a}{t} + (bt + c) \ln\left(\frac{t^2}{t^2+t+1} \right) \right] dt$
Calculer J en cas d'existence.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 035 / 08}}$

Exo 1

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canoonique par la matrice :
$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Reconnaitre la nature de s est donner ses caractéristiques géomètriques.

Exo 2

Existence et calcul de : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\cot an^2(t)}dt$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 036\ /\ 08}}$

Exo 1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha-5 & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$. Calculer A_0^n pour $n \geq 1$.

2) On suppose que $\alpha \neq 0$, trouver $u, v \in \mathbb{R}$ et $Q_\alpha \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$Q_\alpha^{-1} A_\alpha Q_\alpha = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

3) On pose $J = \begin{pmatrix} v & 1 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire A_α^n.

Exo 2

Trouver les primitives de : $F(x) = (x-a)^n \ ; \ n \in \mathbb{Z} \ ; \ a \in \mathbb{C}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 037\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \pounds(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans la base canonique.

1) Calculer le polynôme caractéristique de φ et en déduire que $\varphi^3 = 0$.

2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\psi_n \in \pounds(\mathbb{R}^3)$ telle que : $(\psi_n)^n = id + \varphi$.

4) Trouver un endomorphisme θ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\exp(\theta) = id + \varphi$.

Exo 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1) Montrer que f est définie continue impaire sur $\mathbb{R}^*$.

2) Soit g une primitive de $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}\right)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

a) Exprimer f en fonction de g et étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$.

b) Donner l'allure de la courbe de f.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 038 / 08}}$

Exo 1

1) Justifier l'existence du réel : $\alpha = \inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{\pi/2} (t^2 - at - b\cos(t))^2 dt$.

2) Munir $E = C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire convenablement choisi calculer la valeur de α.

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + 2xf(x) = 1$.

2) Soit l'application h :$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0 \quad h(x) = \frac{1}{2x} e^{x^2} f'(x)$

Montrer que h est décroissante.

3) En déduire l'existence d'un $x_0 \in]0, 1[$ tel que : $\frac{1}{2x_0} e^{x_0^2} f'(x_0) = 0$.

En déduire le sens des variations de f.

4) Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

5) Montrer $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $f(x) \underset{0}{\sim} x$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 039 / 08}}$

Exo 1

1) Montrer que $\varphi(x,y) = (xy, \frac{x}{y})$ définit un C^1 – difféomorphisme de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.

2) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ et vérifiant l'équation aux dérivées partielles : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exo 2

1) Étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x t^2}}{1+t^2} dt$.

2) Calculer $f(x)$ et étudier la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 040 / 08}}$

Exo 1

Soit (S) la surface d'équation : $z^3 = xy$.

Trouver les plans tangents à (S) qui contiennent la droite d'équation : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

Exo 2

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et u la forme linéaire définie sur E par : $u(f) = \int_0^1 f(t)dt.$ Montrer que u est continue et calculer sa norme.

Soient $F = \{f \in E \quad tq \quad f(0) = 0\}$ et v la restriction de u à F.

Montrer que v est continue et calculer sa norme.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 041 / 08}}$

Exo 1

Soient $u_1,\ldots,u_n$ des réels tels que : $|u_1| \neq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i,j \quad a_{i,j} = \begin{cases} u_i u_j & \text{si } (i,j) \neq (1,1) \\ u_1^2 + \alpha & \text{si } (i,j) = (1,1) \end{cases}$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Indication : Faire le cas $n = 2$; et pour $n \geq 3,$ considérer une base $(e_1,\ldots,e_n)$ telle que : $e_1 = (u_1,\ldots,u_n)$; $e_2 = (1,0,\ldots,0)$; et $vect(e_1,e_2)^\perp = vect(e_3,\ldots,e_n)$.

Exo 2

Étudier selon la valeur de u_0 la nature des suites : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6} \end{cases}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 042 / 08}}$

Exo 1

Diagonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exo 2

Montrer que $[t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}]$ est intégrable sur $]0,1[$ et que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 043 / 08}}$

Exo 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi : E \to E$ l'aaplication définie par : $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par $B,$ avec $A = X^4 - 1$, et $B = X^4 - X$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.

3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exo 2

Trouver les primitives de : $f(x) = \frac{1}{x-1+\sqrt{x^2+2x+5}}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 044 / 08}}$

Exo 1

$E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure Euclidienne canonique et $x = (1,1,1)$.
Soit le plan $P = vect(e,f)$, où $e = (1,1,0)$ et $f = (0,1,1)$.
Calculer $d(x,F)$.

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par :
$f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4}$ si $t \in]-\pi,\pi]$.

1) Déterminer la série de Fourier trigonométrique de f et étudier sa convergence.

2) En déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3) Étudier la convergence et la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 045 / 08}}$

Exo 1

Soit (S) la surface d'équation : $x^3 + y^3 - z = 0.$ et $A(0,0,1)$.

1) Déterminer les droites tracées sur (S).

2) Tracer l'allure de l'ensemble des points M de (S) où le plan tangent à (S) contient A.

Exo 2

1) Montrer qu'il existe une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme s est solution de l'équation différentielle : $3xy' + (2-5x)y = x$.

2) Calculer une valeur approchée de $s(1)$ à 10^{-5} prés.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 046 / 08}}$

Exo 1

Trigonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

Exo 2

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par :
$\forall t \in [-\pi, \pi[\quad f(t) = ch(\lambda t)$.
Utiliser la série de Fourier de f pour calculer les sommes $S(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $T(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$.

$\mathbb{SUJET}$ 047 / 08

Exo 1

Étudier la convergence des suites (u_n) ; (v_n) ; (w_n) définies par :

$u_0 = -\frac{1}{2}; v_0 = 0; w_0 = 1;$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} 5u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ 5v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ 5w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$.

Exo 2

Soit g une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et (E_g) l'équation différentielle :
(E_g) $y' + y = g(x)$; d'inconnue y, application dérivable sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.
1) Soit f une solution de (E_g), montrer qu'il existe un réel α tel que :
$\forall x \in [0, +\infty[\quad ; \quad f(x) = \alpha . e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t) e^t dt.$
2) Soit f une application de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles telle que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\mathbb{SUJET}$ 048 / 08

Exo 1

Résoudre le système différentiel : $(S) \begin{cases} x' = x + y + \cos(t) - \sin(t) \\ y' = -x + 3y + \sin(t) \end{cases}$; d'inconnues x et y deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$.

On commencera par résoudre le système homogène en s'appuyant sur la rédution de sa matrice.

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$; $\left(a_n = \frac{1}{n(n+1)}\ , n \geq 1\right)$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 049\ /\ 08}}$

Exo 1

Trigonaliser la matrice : $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exo 2

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. (on pourra poser : $u = x + y$ et $v = x - y$)

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 050\ /\ 08}}$

Exo 1

$E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure Euclidienne canonique et $x = (1,0,0,1)$.
Soit le plan $P = vect(e,f)$, où $e = (1,1,1,1)$ et $f = (1,1,-1,-1)$.
Calculer $d(xF)$.

Exo 2

Trouver le développement en série entière ainsi que son rayon de convegence de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\sqrt{1 - 2x.Ch(a) + x^2}\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 051\ /\ 08}}$

Exo 1

Diagonaliser la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo 2

Développer en série entière : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.
On commencera par trouver une équation différentielle vérifiée par f.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 052\ /\ 08}}$

Exo 1

m étant un paramètre réel, résoudre le système linéaire :

$$(S)\begin{cases} x+y+(1-m)z = m+2 \\ (1+m)x-y+2z = 0 \\ 2x-my+3z = m+2 \end{cases}$$

Exo 2

Résoudre le système différentiel : $(S)\begin{cases} x'' = x'+y'-y \\ y'' = x'+y'-x \end{cases}$ d'inconnues x et y deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pourra remplacer le système (S) par un système équivalent à l'aide de deux opérations élèmentaires simples

$\mathbb{SUJET}$ 053 / 08

Exo 1

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et soient $\varphi_1;\varphi_2;\varphi_3$ les formes linéaires sur E définies par : $\varphi_1(x,y,z) = x+2y-3z$; $\varphi_2(x,y,z) = 5x-3y$; $\varphi_3(x,y,z) = 2x-y-z$.

1) Vérifier que $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est une base de E^*.

2) Trouver la base antiduale de $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$.

Exo 2

Étudier la convergence de la série de terme général : $u_n = (-1)^n\sin(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}})$.

$\mathbb{SUJET}$ 054 / 08

Exo 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reconnaitre la nature géomètrique de u donner ses caractéristiques géomètriques.

Exo 2

On considère la suite (f_n) de fonctions numériques définie sur $[0,2]$ par :

$\forall x \in [0,2] \qquad f_n(x) = n^2x(1-x)^n$.

1) Étudier les variations de f_n sur $[0,2]$.

2) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$.

3) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

4) Montrer que pour $a \in]0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,2-a]$.

SUJET 055 / 08

Exo 1

m, p, et q étant des paramètres réels, discuter le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + my + pt \\ y' = -mx + y + qt \end{cases}$.

On pourra commencer par discuter la réduction de la matrice de ce système.

Exo 2

1) Montrer que l'égalité : $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{2x\cos(t)}dt$; définit une application de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Trouver une expression de $F(x)$ sous forme de la somme d'une série entière. (On chercherа une équation différentielle vérifiée par F (On trouve : $xF''(x) + F'(x) - 4xF(x) = 0$)).

3) En déduire la valeur des intégrales : $I_n = \int_0^{2\pi} \sin^n(t)dt$.

SUJET 056 / 08

Exo 1

Calculer le rang de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ et calculer A^{-1} quand cela est possible.

Exo 2

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $f_n(x) = \frac{1}{n^2+n^4x^2}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1) Montrer que f est définie continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

3) Étudier la dérivabilité de f en 0 et construire la courbe de f.

SUJET 057 / 08

Exo 1

Trigonaliser la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exo 2

Pour $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

1) Montrer que N est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\forall f \in E \quad \|f\|_\infty \le \sqrt{2}\,N(f)$.

3) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 058\ /\ 08}}$

Exo 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner la nature de u et donner ses caractéristiques géomètriques.

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec $(a_n = \frac{1}{2n+1}, n \ge 0)$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 059\ /\ 08}}$

Exo 1

1) Montrer que $\varphi(x,y) = (x, x + \frac{1}{3}y)$ définit C^1 – difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Intégrer l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = |\cos(t)|$.

1) Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

2) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 060\ /\ 08}}$

Exo 1

Calculer l'intégrale double suivante :

$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$; $0 < b < a$.

On pourra utiliser le changement de variable : $\begin{cases} x = au\cos(v) \\ y = bu\sin(v) \end{cases}$.

Exo 2

Étudier la nature de la série de terme génèral $u_n = \sin\left[\left(\frac{n^2+an+b}{n}\right)\pi\right]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 061 / 08}}$

Exo 1

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$.

On pourra commencer par réduire la matrice du ce système.

Exo 2

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ et $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1) Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si $x \geq 0$.

2) Montrer que u est continue sur $[0,+\infty[$ de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et calculer les dérivées successives de u sur $]0,+\infty[$.

3) Étudier la dérivabilité de u en 0 et construire la courbe de u.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 062 / 08}}$

Exo 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \pounds(E)$ tel que : $f^2 = f^3$ et $\dim(\ker(f - id)) = 1$.

Montrer qu'il existe une base de E dans la quelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \{0,1\}$.

Exo 2

Nature de la série de terme génèral $(y_n = (\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1)^\alpha,\ n \geq 2)$; α réel donné.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\quad 063 / 08}}$

Exo 1

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \pounds(E)$ tel que le polynôme minimal de f est $(X-1)^2(X-2)$. Trouver le polynôme minimal de $f + id_E$.

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique et impaire définie par :
$f(t) = \pi t - t^2$ si $t \in [0, \pi]$.

1) Déterminer la série de Fourier trigonométrique de f et étudier sa convergence.

2) On donne l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $g(0) = g(\pi) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R} \quad g''(t) = f(t)$.

a) Montrer que g est 2π-périodique et impaire.

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique de g et étudier sa convergence.

c) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{10}}$.

$\mathbb{SUJET}$ 064 / 08

Exo 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in £(\mathbb{C}^n)$, $S \in \mathbb{C}[X]$, et $P_u(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\ldots(\lambda_n - X)$ le polynôme caractéristique de u. Montrer que $P_{S(u)}(X) = (S(\lambda_1) - X)(S(\lambda_2) - X)\ldots(S(\lambda_n) - X)$.

Exo 2

Développer en série entière la fonction f trouver le rayon de convergence du développement obtenu pour : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

$\mathbb{SUJET}$ 065 / 08

Exo 1

Soient $n \geq 2$ et $A \in E = M_n(\mathbb{K})$ telle que $tr(A) \neq 0$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(M) = tr(A)M - tr(M)A$.

1) Calculer $f(A)$ et $f(M)$ si $tr(M) = 0$.

2) En déduire que f est diagonalisable.

Exo 2

Résoudre et trouver les solutions réelles de (E) $y'' + y' + y = t\cos(t)$.

$\mathbb{SUJET}$ 066 / 08

Exo 1

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et $f \in £(E)$ tel que $rg(f - id) = 1$.

1) Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $H = \ker(f - id)$ et $e_n \in E \backslash H$. Justifier que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E et donner la forme de la matrice de f dans cette base.

2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\det(f) \neq 1$.

Exo 2

Calculer l'intégrale triple : $J = \iiint_\Delta (x^2 + y^2 + 2x - 1)dxdydz$

où $\Delta = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; tq \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq xy \end{array} \right. \right\}$

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 067 / 08}}$

Exo 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.
Soit $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \quad tq \quad MA = AM\}$.
1) Montrer que $C(A)$ est une sous algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ ayant n pour dimension.
2) Montrer que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$ et exprimer A^n dans cette base.

Exo 2

Nature de la série de terme génèral $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+an-1} + \frac{b}{n})$, $a,b \in \mathbb{R}$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 068 / 08}}$

Exo 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe de valeurs propres α_1 et α_2.
1) On suppose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
a) Montrer qu'il existe deux matrices $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{C})$ linéairement indépendantes telles que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \alpha_1^n M_1 + \alpha_2^n M_2$.
b) Calculer : $M_1 + M_2$; M_1^2 ; M_2^2 ; M_1M_2 et M_2M_1.
c) Montrer que $M_1, M_2 \in vect(A, I_2)$.
2) On suppose que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Montrer que l'on a :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1}M \quad$ avec $\quad M = A - \alpha I_2$.

Exo 2

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec :
$a_{4n} = a_{4n-2} = a_{4n-3} = 0$, $a_{4n-1} = \frac{(-1)^n}{4n}$, $n \geq 1$.

$\overbrace{\underbrace{\mathbb{SUJET}\ \ 069 / 08}}$

Exo 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u, v \in \pounds(E)$ tels que : $u \circ v = v \circ u$.
On suppose que u et v sont diagonalisables.
Montrer que E admet une base formée de vecteurs propres communs à u et v (càd une base dans laquelle les matrices de u et v sont simultanèment diagonales).

Exo 2

Soient $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par :
$f(\pi) = 0$ et $\forall t \in]-\pi, \pi[\quad f(t) = \sin(\lambda t)$.
1) Déterminer la série de Fourier trigonométrique de f et étudier sa convergence.
2) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2-\lambda^2}$.

$\underbrace{\overbrace{\mathbb{SUJET} \quad 070 / 08}}$

Exo 1

Soit $f \in £(\mathbb{R}^3)$ de matrice A dans la base canonique, soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$.
Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$.

Montrer que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Exo 2

1) Résoudre et trouver les slutions réelles de l'équation différentielle : $(E_0) \quad y'' + y = ch(x)$
2) Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiants : $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad f'(x) + f(-x) = e^x$.