Réduction des endomorphismes

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Généralités

I.1 Élements propres

Définition I.1 On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, si $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E)$ est appelé sous espace propre de u associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de u est appelé son spectre noté $Sp(u)$.

On définit de même les éléments propres d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}$.

Proposition I.1 λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda id_E$ n'est pas injective.

Remarque I.1 Si u n'est pas injective $0 \in Sp(u)$ et réciproquement.

Exemples

(1) Homothétie :

(2) Projection :

(3) Symétrie :

(4) La matrice $A = (1)_{1\leq i,j\leq n}$:

Proposition I.2 Deux matrices semblables ont même spectre.

Preuve: Si $a \in GL(E)$ alors les vecteurs propres (resp. les epaces propres) de aua^{-1} sont les images de ceux de u par l'automorphisme a avec les mêmes valeurs propres.

I.2 Polynôme minimal (dimension finie)

Définition I.2 Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on pose

$$u^0 = id,\ u^1 = u \text{ et on définit par récurrence}$$
$$u^n = u \circ u^{n-1} \text{ (ou } u^n = u.u^{n-1}\text{)}$$

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, on définit $P(u)$ dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ par

$$P(u) = a_0 id + a_1 u + a_2 u^2 + ... + a_n u^n$$

Théorème I.1 L'application : $P \longmapsto P(u)$ (pour u dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ fixé) est un morphisme d'algèbre entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$. En particulier

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X] : (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Preuve: vue plus haut, dans le cas général

Théorème I.2 (et définition) L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

En **dimension finie**, cet idéal est non réduit à $\{0\}$; tout polynôme annulateur est multiple du polynôme de degré minimal qui engendre cet idéal, qu'on appelle polynôme minimal de u, on le notera π_u (ou π_M).

Preuve: vue plus haut, dans le cas général

Exemple :

(1) Le polynôme minimal d'une projection est $X^2 - X$. Quel est le polynôme minimal d'une symétrie ?

(2) Le polynôme minimale d'une matrice ... 2x2

Exercice I.1 Le polynôme minimal de u est de degré 1. Que peut-on en conclure sur u ?

Théorème I.3 Pour tout $a \in GL(E)$, l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E)\\ u &\longmapsto aua^{-1}\end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres. En particulier, pour tout polynôme P on a

$$aP(u)a^{-1} = P(aua^{-1})$$

et donc $\pi_u = \pi_{aua^{-1}}$. Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Preuve: facile

Théorème I.4 Si $\lambda \in Sp(u)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in$

6

$Sp(P(u))$. En particulier toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur.

Preuve: Si $u(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$ et par linéarité $P(u)(x) = P(\lambda)x$. En particulier si $P(u) = 0$ alors $P(\lambda) = 0$.

I.3 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème I.5 Si P et Q sont premiers entre eux, on a

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

7

En général si P_1, P_2, ..., P_r sont deux à deux premiers entre eux alors

$$\ker(P_1P_2...P_r)(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus ... \oplus \ker P_r(u)$$

donc si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ (P_i 2 à 2 premiers entre eux) annule u alors E est somme directe des noyaux des $P_i(u)$.

Preuve: Appliquer le théorème de Bezout, et faire une récurrence sur r.

Théorème I.6 Toute famille d'espaces propres est en somme directe ; autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des vp différentes, est libre.

8

Preuve: Résultat immédiat du théorème des noyaux généralisé à un nombre quelconque de polynômes premiers entre eux deux à deux : ici les $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exemple I.1 On considère l'espace E des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le sev $\mathcal{S}$ constitué des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2by' + cy = 0.$$

Notons $u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto u'$. Alors

$$\mathcal{S} = \ker(u^2 + 2bu + cId_E).$$

Pour fixer les idées, supposons que $b^2 - c > 0$: on a alors une

9

factorisation

$$P(X) = X^2 + 2bX + c = (X - \lambda)(X - \mu)$$

et il vient $\mathcal{S} = \ker(u - \lambda Id_E) \oplus \ker(u - \mu Id_E)$; ce qui signifie que toute solution s'écrit (de façon unique) $Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$.

Exercice I.2 (Math2 CCP 2009) Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère un endomorphisme u tel que

$$u^3 - u^2 + u - Id_E = 0$$

déterminer le spectre de u.

10

II Sous-espaces stables

II.1 Définition – exemples

Définition II.1 Un sev F de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$. Ce qui permet de définir un endomorphisme sur F induit par u, noté $u_{\|_F}$.

Exemple II.1 $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$, et en général pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ $\ker(u - \lambda Id_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \lambda Id_E)$, sont stables par u.

Exercice II.1 Soit u un endomorphisme de rang 1, montrer que son image est une droite stable.

11

Proposition II.1 Soient F et G deux sev stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi $u-$stables. En général toute somme et intersection de sev u-stables est u-stable.

Preuve: Facile

Théorème II.1 Si u et v commutent, alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. En particulier si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$; alors $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $Q(u)$. En particulier les s.e.p de u sont stables par v.

Preuve: la faire

Exercice II.2 Comparer $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ si P divise Q. Que dire de $\ker \pi_u(u)$?

12

Proposition II.2 Si F est stable par u, les éléments propres de $u_{\|_F}$ sont les éléments propres de u appartenant à F. En particulier $E_\lambda(u_{\|_F}) = E_\lambda(u) \cap F$.

Preuve: facile

Théorème II.2 Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une droite u-stable de E ; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une droite ou un plan u-stable de E.

Preuve: π_u se factorise dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs irréductibles $(X - a)^k$ et dans $\mathbb{R}$ $(X - a)^k$ ou $(X^2 - sX + p)^k$. Dans les deux cas $\pi_u(u) = 0$. Donc l'un au moins des facteurs $(u - aId_E)^k$ ou $(u^2 - su + pId_E)^k$ n'est pas injectif. Dans le second cas on considère $(x, f(x))$ pour $x \in \ker(u^2 - su + pId_E)$...

13

II.2 Matrices et sev stables

Théorème II.3 F est stable par u si et seulement si **dans une base adaptée à** F ($\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$), u admet une matrice triangulaire par blocs :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(u_{\|_F})$. Dans ce cas, on a :

$\pi_{u_{\|_F}}$ divise π_u. **Mieux encore** π_u est multiple de π_A et de π_B et un diviseur du produit de $\pi_A\pi_B$.

Preuve: On pose $\mathcal{B}_1=(e_1,...,e_r)$ et $\mathcal{B}_2=(e_{r+1},...,e_n)$ et on pose $vect(e_1,...,e_r)=F$, $vect(e_{r+1},...,e_n)=G$. $A=$

⑭

$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(u_{\|_F})$ et $B=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2}(\widetilde{u})$ où $\widetilde{u}=(p\circ u)_{\|_G}\in\mathcal{L}(G)$, avec p la projection sur G parallèlement à F. Donc $\pi_B=\pi_{\widetilde{u}}$.

D'abord si $P(u)=0$ alors, comme

$$P\left[\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

attention les $*$ dans les deux matrices ne sont pas les mêmes,

on aura aussi $P(A)=0$ et $P(B)=0$.

D'autre part, si on pose $P=\pi_A\pi_B$,

$$P(M)=\pi_A(M)\pi_B(M)=\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \pi_A(B) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_B(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⑮

Remarque II.1 Dans ce cas : $\det(u)=\det(A).\det(B)$. (Sup).

Théorème II.4 Si $\dim E=n$, le polynôme minimal de u (ou $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est de degré inférieur ou égal à n.

Preuve: Par récurrence sur n, en utilisant les Théorèmes II.2 et II.3.

Théorème II.5 $E=F_1\oplus...\oplus F_s$ est somme directe de sev stables par u si et seulement si dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale par blocs. i.e si $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup...\cup\mathcal{B}_s$

⑯

avec $\mathcal{B}_i$ base de F_i, alors

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix}$$

où $A_i=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_i}(u_{\|_{F_i}})$

Remarque II.2 Dans ce cas $\det u=\prod_{j=1}^{s}\det(A_j)$.

⑰

III Polynôme caractéristique

III.1 Définition – Exemples

On a vu que λ est une vp si et seulement si $u-\lambda Id_E$ est non inversible.

Définition III.1 Le polynôme caractéristique de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}$ est $\chi_A(X)=\det(A-XI_n)$.

⑱

Exemples

(1) $\chi_{I_n}=(1-X)^n$ en général si $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ alors $\chi_A=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-X)$.

(2) Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, alors $\chi_A=\prod_{i=1}^{n}(a_{i,i}-X)$.

(3) $A=(1)_{1\le i,j\le n}$. $\chi_A=(-1)^n X^{n-1}(X-n)$. Prouver le ?

⑲

Propriétés

(1) Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

(2) Les valeurs propres de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les racines de χ_A.

(3) $\chi_A(X)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1}+...+\det A$.

(4) Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.

(5) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

Définition III.2 Le polynôme caractéristique de $u\in\mathcal{L}(E)$ est $\chi_u(X)=\det(u-XId_E)$ (indépendant de la base choisie). Les valeurs propres de u sont alors les racines de χ_u.

⑳

Proposition III.1 Si $\dim E=n$, un endomorphisme de u a au plus n valeurs propres.

Preuve: En effet $\chi_u(X)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(u)X^{n-1}+...+\det u$ est de degré n donc admet au plus n racines.

Exercice III.1 Montrer que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$, au moins pour A inversible. Puis utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III.2 Théorème de Cayley–Hamilton

Théorème III.1 Si F est un sev de E stable par u, alors $\chi_{u_{\|_F}}$ divise χ_u. Mieux, le polynôme caractéristique d'une matrice

㉑

triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal au produit de χ_A et χ_B.

Preuve:

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} - \lambda I_n\right] = \det\begin{pmatrix} A-\lambda I_p & * \\ 0 & B-\lambda I_q \end{pmatrix}$$
$$= \det(A-\lambda I_p)\det(A-\lambda I_q).$$

Théorème III.2 (Théorème de Cayley–Hamilton) Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique. Ou encore : le polynôme caractéristique de u annule u. Ou enfin : $\chi_u(u) = 0$.

22

Preuve: Par recurrence sur $n = \dim E$. D'abord si $n = 1$ et $n = 2$ puis utiliser le théorème II.2. Même démo que le poly minimal.

Théorème III.3 Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$) sont les racines de son polynôme minimal (et son polynôme caractéristique).
En fait on a mieux : tout diviseur irréductible de χ_u divise π_u

Preuve: π_u annule u, donc toute valeur propre de u est racine de π_u. Réciproquement, soit λ racine de π_u alors racine de χ_u et donc valeur propre. Dans le cas général, une démo par récurrence à l'instar de celle de Cayley–Hamilton peut faire l'affaire.

Celà permet de montrer le Théorème IV.4

23

Multiplicité d'une valeur propre

Définition III.3 La multiplicité de la valeur propre λ est le plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise le polynôme caractéristique.

Exemple III.1 pour un projecteur, la multiplicité de la vp 1 n'est autre que le rang (ou encore la trace !).

Théorème III.4 Soit une vp λ de u, la dimension du sev propre $E = \ker(u-\lambda id)$ est inférieure (ou égale) à la multiplicité de λ dans χ_u.

Preuve: En effet, sur $F = E_\lambda = \ker(u-\lambda id)$, on a $\chi_{u_{\|F}}(X) = (\lambda - X)^{\dim F}$ divise χ_u donc $\dim F \leq m$.

24

Théorème III.5 Le nombre des valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité, vaut au maximum n. Il vaut n exactement si et seulement si le polynôme χ_u est scindé. Dans ce cas, si $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$, on a $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{p} {\lambda_i}^{m_i}$.

Preuve: Quitte à travailler avec la restriction de u à

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}$$

25

qui est stable, on peut supposer que

$$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$$

on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}$, d'après le théorème précédent $\dim\ker(u-\lambda_i Id_E) \leq m_i$.

Exercice III.2 En fait **On a mieux :** $\dim\ker(u-\lambda_i Id_E)^{m_i} = m_i$.

En effet : : $F = \ker(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}$ est un sev de E stable par u, et $(u_{\|F} - \lambda_i Id_F)^{m_i} = 0$ donc $(X-\lambda_i)^{m_i}$ est un polynôme annulateur de $u_{\|F}$ et par conséquent $\chi_{u_{\|F}} = (\lambda_i - X)^{\dim F}$ (car

26

tout poly irréductible divisant χ_A divise π_A), et comme $\chi_{u_{\|F}}$ divise $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$ alors $\dim F \leq m_i$ et aussi $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_{\|\ker(u-\lambda_i Id_E)^{m_i}}}$ et par suite pour tout i, $\dim\ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i} = m_i$.

27

IV Diagonalisation

IV.1 Définitions – Exemples

Définition IV.1 u est diagonalisable si et seulement si E est la somme (directe) des sev propres de u. Il revient au même de dire que E admet une base de vecteurs propres pour u, ou encore qu'il existe une base de E dans laquelle $\mathcal{M}at(u)$ est diagonale (d'où le nom !).

Exemple IV.1 Tout projecteur (resp. toute symétrie) est diagonalisable, avec deux espaces propres qui sont supplémentaires. Par définition même, toute affinité est diagonalisable (en un sens général, tout endomorphisme diagonalisable ap-

28

paraît comme une affinité dans une base adéquate).

Proposition IV.1 Si u n'a qu'une valeur propre, alors u n'est pas diagonalisable si et seulement si u est une homothétie.

Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est endomorphisme diagonalisable, on note F_1, F_2, ..., F_s ses sep ($F_i = \ker(u-\lambda_i Id_E)$) de sorte que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$. On associe alors u la famille $(p_1, \ldots, p_s)$ des projecteurs associés à cette décomposition :

$$\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{s} p_i(x) \text{ avec } p_i(x) \in F_i.$$

29

Dans ce cas, on rappelle que

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = Id_E, \;\; p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j \;\text{ et }\; p_i \circ p_i = p_i \;\text{ pour tout } i.$$

Proposition IV.2 Avec les notations ci-dessus, on a

$$u = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \;\text{ et pour tout } \varphi \in \mathbb{K}[X], \; \varphi(u) = \sum_{i=}^{s} \varphi(\lambda_i) p_i.$$

Un cas simple

Théorème IV.1 Supposons que χ_u admette n vp distinctes. Alors u est diagonalisable.

30

Preuve: $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$, $n = \dim E$ donc $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(u - \lambda_i Id_E)$

IV.2 Caractérisation

Théorème IV.2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) u est diagonalisable

(2) Il existe un polynôme annulateur de u, scindé et à racines simples.

(3) Le polynôme caractéristique de u est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de u est égale à la mul-

31

tiplicité de la valeur propre correspondante.

Preuve: (1)$\Longleftrightarrow$(2). Avec les notations ci-dessus, si u est diagonalisable alors $u = \lambda_1 p_1 + ... + \lambda_s p_s$ et par conséquent le polynôme $\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ annule u. Réciproquement, si un polynôme $\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ annule u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(u - \lambda_i Id_E)$.

(1)$\Longleftrightarrow$(3). On a déjà montré plus haut que si

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

32

alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i}$$

et que

$$\dim \ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i} = m_i$$

en plus $\ker(u - \lambda_i Id_E) \subset \ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i}$ donc si $\dim \ker(u - \lambda_i Id_E) = m_i$ alors $\ker(u - \lambda_i Id_E) = \ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i}$ et réciproquement.

Remarques

(1) Dans (2) le polynôme annulateur n'est pas forcément le polynôme minimal ! On peut rajouter des racines qui

33

n'ont rien à voir.

(2) En combinant (2) et (3), on a l'équivalence si $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X)^{m_i}$,

$$u \;\text{ est diagonalisable si et seulement si }\; \pi_u = \prod_{i=1}^{s} (\lambda_i - X).$$

Corollaire IV.1 Si u est diagonalisable, alors toute restriction de u à un sev stable l'est.

Donc (dans ce cas) les sev stables sont les sev qui admettent une base de vecteurs propres.

34

IV.3 Diagonalisation d'une matrice carrée.

Définition IV.2 Une matrice carrée est dite diagonalisable si et seulement si il existe un changement de base qui la rende diagonale.

Evidemment : u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est !

Exemples

(1) La matrice J

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

35

d'abord $J^2 = 3J$ donc le polynôme

$$X^2 - 3X = X(X-3)$$

scindé à racines simples annulateur de J, donc J est diagonalisable,

$$eigen\ vectors:$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

associés à $0, 0$ et 3.

(2) La matrice K dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

36

characteristic polynomial :

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)\left(X^2+1\right),$$

$$eigen\ vectors:$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

associé à $1, -i$ et i.

IV.4 Trigonalisation

Définition IV.3 Soit u un endomorphisme, il est trigonalisable si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

37

Remarque IV.1 on passe de « triangulaire supérieure » à « triangulaire inférieure » en renversant la base.

Définition IV.4 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si il existe un changement de base qui la rende triangulaire (supérieure).

Nous disposons alors d'un Théorème (et un seul!!!) qui caractérise les endomorphismes (resp. les matrices) trigonalisables.

Théorème IV.3 $u \in \mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$. Même chose en remplaçant u par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

38

Preuve: Supposons χ_A scindé : il possède en particulier une racine au moins $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, et un vecteur propre associé e_1. Complétons e_1 en une base $B = (e_1, ..., e_n)$, dans cette nouvelle base, A devient

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B — qui est la matrice d'un endomorphisme de $Vect(e_2, ..., e_n)$ divise celui de A_1, qui est celui de A. En particulier, il est scindé aussi. En conséquence, on peut appliquer à B une hypothèse de récurrence (puisque B est de taille $n-1$) et faire sur $(e_2, ..., e_n)$ un changement de base en $(e_2', ..., e_n')$ qui rende B triangulaire : dans

39

la base $(e1, e_2', ..., e_n')$, on a la nouvelle matrice

$$A_1' \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où T est triangulaire.

Comme l'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée pour $n = 1$, le Théorème est démontré.

Exemple IV.2 Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

40

characteristic polynomial : $X^3 - X^2 - X + 1 = (X+1)(X-1)^2$, eigenvectors : $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1$, on complète par $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule l'image de ε_3,

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -8\varepsilon_1 + 10\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

41

Donc la matrice A dans la base $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ devient

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1 \\ 0 & -2/5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corollaire IV.2 Si le corps de base est $\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

42

Exercice IV.1 Dans ce cas, montrer la relation $\operatorname{tr}(u^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

IV.5 Endomorphisme (et matrice) nilpotent(e)

Définition IV.5 On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ (resp $A^k = 0$). Dans ce cas le plus petit k (il est $\leq n$) vérifiant l'égalité est dit indice de nilpotence.

Théorème IV.4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est nilpotent.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est $(-X)^n$.

43

(iii) u est trigonalisable de spectre nul.

Remarque IV.2 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) alors elle ne peut être diagonalisable que si elle est nulle, par contre elle est toujours trigonalisable.

Un cas important dans la pratique est celui des endomorphismes nilpotents d'indice $n = \dim E$:

Proposition IV.3 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ $\dim E = n$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) vérifie $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$ (resp $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$) alors u

44

(resp A) admet la matrice (resp semblable à la matrice)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans toute base $\left(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), ..., u(x), x\right)$ où x est un vecteur vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0$.

Preuve: La faire en exercice.

45

Exemple

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$
characteristic polynomial : $X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X+1)^3$, une seule vp -1, et la matrice
$$N = A + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$
vérifie $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. En prenant $X = (1,0,0)$, on a $N^2X = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $NX = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dans la base

46

$\left(N^2X, NX, X\right)$, la matrice N devient

$$\text{la matrice } N \text{ devient } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } A \text{ devient } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Application au Calcul des puissances

Le Théorème de Cayley-Hamilton (ou la trouvaille d'un polynôme annulateur en général) permet de calculer plus facilement que par diagonalisation les puissances d'une ma-

47

trice.

Par exemple si $A^2 = aI_3 + bA$, alors
$$\begin{aligned} A^3 &= A(aI_3 + bA) = aA + b(aI_3 + bA) \\ &= baI_3 + (a + b^2)A \end{aligned}$$
ce qui permet de calculer A^n soit par la formule dubinôme de Newton, oubien par récurrence...

48