

# Fonctions holomorphes

POUR FILIÈRES MP ET PSI

DANS TOUT LE DOCUMENT  $\Omega$  désignera un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ . Si  $z_0$  est un complexe et  $r$  est réel strictement positif,  $D(z_0, R)$  désignera la boule ouverte de  $\mathbb{C}$  de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .

L'ensemble  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + iy \in \Omega\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  car c'est l'image réciproque de  $\Omega$  par l'application linéaire est donc continue  $(x, y) \mapsto x + iy$ . Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  peut être confondue avec la fonction  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ .

On adoptera les notations du calcul différentiel. Si  $f$  est différentiable en  $z_0 \in \Omega$  alors  $df(z_0).h$  désignera la différentielle de  $f$  en  $z_0$  appliquée au vecteur  $h$ ; et se référant à la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$  on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0).1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = df(z_0).i.$$

## Rappel de calcul différentiel

Soient  $p$ ,  $n$  et  $m$  des entiers naturels non nuls,  $U$  et  $V$  des ouverts respectifs de  $\mathbb{R}^m$  et de  $\mathbb{R}^n$ . Et soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ .

1. On considère deux fonctions

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) \\ f : V &\rightarrow \mathbb{R}^p, x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto f(x). \end{aligned}$$

On suppose que  $\varphi(I) \subset V$ .

Si  $\varphi$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur leurs domaines de définition respectifs, alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et pour tout  $t \in I$

$$(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)).\varphi'(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t))\varphi'_k(t)$$

2. Soient maintenant des fonctions

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ g : V &\rightarrow \mathbb{R}^p, y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \mapsto g(y). \end{aligned}$$

On suppose que  $f(U) \subset V$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $g$  l'est sur  $V$  alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et pour tout  $x \in U$

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x) &= dg(f(x)) \circ df(x) \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_k}(x) &= dg(f(x)).\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) \end{aligned}$$



## Fonctions holomorphes

### Définition 1

Soit une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. soit  $z_0 \in \Omega$ . On dit que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si et seulement si la fonction :

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

admet une limite dans  $\mathbb{C}$  en  $z_0$ . cette limite est alors notée  $f'(z_0)$ .

2. On dit que  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  si et seulement si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$  est sa fonction dérivée  $f' : z \mapsto f'(z)$  est continue sur  $\Omega$ .

### Théorème 1

Soit une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. soit  $z_0 \in \Omega$ .  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est différentiable en } z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ (Condition de Cauchy-Riemann)} \end{cases}$$

2.  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \text{ (en tant que fct des 2 variables } x \text{ et } y) \\ \forall z \in \Omega, \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z) \end{cases}$$

**Démonstration – 1 :**

1.  $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ . Pour tout  $h \in \mathbb{C}$  voisin de 0,  $f(z_0 + h) - f(z_0) = hf'(z_0) + o(|h|)$ , par définition même de  $f'(z_0)$ .

Donc  $f$  est différentiable en  $z_0$  et pour tout  $h \in \mathbb{C}$ ,  $df(z_0).h = hf'(z_0)$ .

Ainsi  $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0).1 = f'(z_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = df(z_0).i = if'(z_0)$ .

On a bien  $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ .

$\Leftarrow$ ) Si maintenant  $f$  est différentiable en  $z_0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ . On a pour tout  $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  voisin de 0

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= df(z_0).(h) + o(|h|) \\ &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) + o(|h|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(\alpha + i\beta) + o(|h|) \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + o(|h|) \end{aligned}$$

Alors  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  et  $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ .

2.  $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ , alors d'après 1.  $f$  est différentiable en tout point de  $\Omega$  et pour tout  $z \in \Omega$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z)$ .  $f'$  étant continue, les dérivées partielles de  $f$  sont donc continues.  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie les conditions de Cauchy–Riemann, alors d'après 1.  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$ , et l'égalité  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$  indique que  $f'$  est continue sur  $\Omega$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .

**Remarques :**

- **À retenir :** Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  alors  $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ .
- Nous verrons qu'une fonction holomorphe sur  $\Omega$  est en fait "de classe  $\mathcal{C}^\infty$ " sur  $\Omega$  (et même plus, elle est analytique sur  $\Omega$ ).
- En posant  $z = x + iy$ , un procédé de calcul familier chez le voisin physicien (pas complètement faux d'ailleurs ...) permettrait d'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

La condition de Cauchy–Riemann serait alors équivalente à :  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

Intuitivement l'holomorphie de  $f$  signifierait alors que l'expression  $f(z)$  ne dépend pas de  $\bar{z}$ .

On voit ainsi, par exemple, que la fonction  $z \mapsto \bar{z}$  n'est holomorphe sur aucun ouvert de  $\mathbb{C}$ .

### • Interprétation géométrique de L'holomorphie

Une fonction holomorphe  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (au sens différentiel). Pour tout  $z \in \Omega$

$$\forall h \in \mathbb{C}, df(z).h = hf'(z).$$

Si  $f'(z) \neq 0$ ,  $df(z)$  est donc la similitude directe du plan complexe de rapport  $|f'(z)|$  et d'angle  $\text{Arg}(f'(z))$ .

Géométriquement, les similitudes conservant les angles, cela signifie que si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux arcs de classe  $\mathcal{C}^1$  contenus dans  $\Omega$  et qui se coupent en un point  $z$  alors  $f(\Gamma_1)$  et  $f(\Gamma_2)$  sont des arcs de classe  $\mathcal{C}^1$  contenus dans  $f(\Omega)$  et qui se coupent en  $f(z)$  selon le même angle que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , puisque les tangentes en  $f(z)$  à  $f(\Gamma_1)$  et à  $f(\Gamma_2)$  sont les images par la similitude  $df(z)$  des tangentes respectives en  $z$  à  $\Gamma_1$  et à  $\Gamma_2$ .

### Propriétés 1

Soient deux fonctions  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. Si  $f$  et  $g$  sont holomorphes alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f + \lambda g$  est holomorphe sur  $\Omega$  et  $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$
2. Si  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $\Omega$  alors  $fg$  est holomorphe sur  $\Omega$  et  $(fg)' = f'g + fg'$
3. On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ . Si  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $\Omega$  alors  $\frac{f}{g}$  est holomorphe sur  $\Omega$  et

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En particulier  $\frac{1}{g}$  est holomorphe sur  $\Omega$  et  $\left( \frac{1}{g} \right)' = -\frac{g'}{g^2}$ .

**Démonstration** — 2 Du à la définition de la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité à l'aide de limites, toutes les démonstrations se feront de la même façon que pour les fonctions numériques d'une variable réelle de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Remarques :**

- On note  $\mathcal{O}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .  
Les propriétés 1. et 2. impliquent que  $\mathcal{O}(\Omega)$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathbb{C}^\Omega$  des fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .
- Une récurrence simple permettra de justifier que si  $f$  est holomorphe, la fonction  $f^p$  est holomorphe pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $(f^p)' = pf'f^{p-1}$ .  
Attention, on ne parle pas impunément de la fonction  $f^\alpha$ , si  $\alpha$  est un réel donné.
- Comme mentionné auparavant une fonction holomorphe est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On définit récursivement les dérivées successives d'une telle fonction de la même manière que pour une fonction numérique de la variable réelle.  
Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions holomorphes, la formule de Leibniz reste valable :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (fg)^{(p)} = \sum_{k=1}^p C_p^k f^{(k)} g^{(p-k)}$$

**Proposition 1**

Soit  $\Delta$  un autre ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $f(\Omega) \subset \Delta$ .

Si  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  et  $g$  est holomorphe sur  $\Delta$  alors  $g \circ f$  est holomorphe sur  $\Omega$  et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

**Démonstration** — 3 D'après le théorème sur la condition de Cauchy–Riemann,  $f$  et  $g$  seraient de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $z \in \Omega$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z) = dg(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \times g'(f(z)) = f'(z) \times g'(f(z))$$

de même

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(z) = g'(f(z)) \times \frac{\partial f}{\partial y}(z) = if'(z) \times g'(f(z))$$

On a bien  $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(z) = i \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z)$ .

Ainsi  $g \circ f$  est holomorphe sur  $\Omega$  et pour tout  $z \in \Omega$

$$(g \circ f)'(z) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(z) = f'(z) \times g'(f(z))$$

**Proposition 2**

On suppose que  $\Omega$  est **connexe par arcs**.

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ .  $f$  est constante sur  $\Omega$  si et seulement si  $f'$  est nulle sur  $\Omega$ .

**Démonstration** — 4  $\Omega$  étant connexe par arcs et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , on a  $f$  est constante sur  $\Omega \iff \forall z \in \Omega, df(z) = 0 \iff \forall z \in \Omega, f'(z) = 0$ .

**Exemples :**

- Toute fonction polynomiale à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .  
En effet la fonction  $z \mapsto z$  est trivialement holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , de dérivée constante de valeur 1. Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $z \mapsto z^k$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  de dérivée la fonction  $z \mapsto kz^{k-1}$ .

Soit alors  $P : z \mapsto \sum_{k=0}^p a_k z^k$  une fonction polynomiale à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .  $P$ , comme combinaison linéaire de fonctions holomorphes, est holomorphe de dérivée la fonction

$$P' : z \mapsto \sum_{k=1}^p k a_k z^{k-1}$$

- En considérant la définition trigonométrique de la fonction exponentielle  $\exp :$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}(e^z) = e^x(-\sin y + i \cos y) = ie^x(\cos y + i \sin y) = ie^z$$

La condition de Cauchy–Riemann est bien remplie :  $\exp$  est donc holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $\exp' = \exp$ .

- Soit  $\gamma \in \mathbb{C}$ , la fonction  $f_\gamma : z \mapsto e^{\gamma z}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , comme composée de fonctions holomorphes et  $f'_\gamma(z) = \gamma e^{\gamma z}$

Soit maintenant  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $g(z) = t^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \ln t}$ .

$g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  est  $g'(z) = \ln(t)e^{z \ln t} = \ln(t)t^z$ .

**N.B :** Si  $z \in \mathbb{C}$  alors  $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$  et donc  $|t^z| = t^{\text{Re}(z)}$

- On pose pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ et } \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Les fonctions  $z \mapsto e^{iz}$  et  $z \mapsto e^{-iz}$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$  comme composition de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$ , donc  $\cos$  et  $\sin$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\sin z \text{ et } \sin' z = \cos z$$

- **Fonction  $\zeta$  de Riemann**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\text{Re}(z)}}$ . Donc si  $\text{Re}(z) > 1$  alors la série  $\sum \frac{1}{n^z}$  est absolument convergente.

On pose alors  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) > 1\}$  et pour tout  $z \in \Omega$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Fixons alors  $y \in \mathbb{R}$  et considérons la fonction  $\zeta_y : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$ ,  $x \in ]1, +\infty[$ .

Les fonctions  $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^{x+iy}}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$

$$u'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

La série de fonctions  $\sum u_n$  CVS sur  $]1, +\infty[$ , et si on prend  $\alpha > 1$  alors pour tout  $x \in [\alpha, +\infty[$

$$|u_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^\alpha}$$

Donc  $\sum u'_n$  CVN sur  $[\alpha, +\infty[$ , ceci pour tout  $\alpha > 1$ . Alors la fonction  $\zeta_y$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \zeta'_y(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

Ainsi  $\zeta$  admet une dérivée partielle selon  $x$  en tout point  $z \in \Omega$  et

$$\forall z \in \Omega, \frac{\partial \zeta}{\partial x}(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

De même en considérant pour un  $x \in ]1, +\infty[$ , la fonction  $\zeta^x : y \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$ , on démontre que  $\zeta$  admet une dérivée partielle selon  $y$  en tout point de  $\Omega$  et que

$$\forall z \in \Omega, \frac{\partial \zeta}{\partial y}(z) = -i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$$

Soit ensuite un compact  $K \subset \Omega$ . La fonction  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$  est continue donc elle est borné est atteint sa borne inférieure sur  $K$ , en posant  $\alpha = \min_{z \in K} \operatorname{Re}(z)$  on a alors  $\alpha > 1$  (car  $K \subset \Omega$ ) et

$$\forall z \in K, \left| \frac{\ln n}{n^z} \right| \leq \frac{\ln n}{n^\alpha}$$

La série  $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$  converge donc la série de fonctions  $\sum \frac{\ln n}{n^z}$  CVN sur  $K$ .

$\sum \frac{\ln n}{n^z}$  CVN sur tout compact de  $\Omega$  et les fonctions  $z \mapsto \frac{\ln n}{n^z}$  sont continues sur  $\Omega$

donc la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}$  est continue sur  $\Omega$ .

Alors les dérivées partielles  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  sont continue sur  $\Omega$ .  $\zeta$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$

sur  $\Omega$ . Elle vérifie en plus la condition de Cauchy–Riemann  $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = i \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ , elle est donc holomorphe sur  $\Omega$ , avec

$$\forall z \in \Omega, \zeta'(z) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^z}.$$

• **Fonction  $\Gamma$  d’Euler**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1}e^{-t}$ . Donc si  $\operatorname{Re}(z) > 0$  alors

la fonction  $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$  est continue intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors  $\mathcal{P}^+ = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , et pour tout  $z \in \mathcal{P}^+$

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt$$

Comme pour  $\zeta$  on fixe  $y \in \mathbb{R}$  est considère la fonction  $\Gamma_y : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x+iy-1}e^{-t} dt$ .

On démontre via la formule de Leibniz sur la dérivation d’une intégrale dépendant d’un paramètre que  $\Gamma_y$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma'_y(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x+iy-1}e^{-t} dt$$

Ce qui justifierait l’existence de  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$  et que

$$\forall z \in \mathcal{P}^+, \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t} dt$$

Et de la même façon, on démontre l’existence sur  $\mathcal{P}^+$  de  $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}$  avec cette fois

$$\forall z \in \mathcal{P}^+, \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(z) = i \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t} dt$$

On démontre ensuite en utilisant le théorème de continuité d’une intégrale dépendant d’un paramètre que la fonction  $z \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t} dt$  est continue sur toute partie de la forme  $[\alpha, +\infty[ + i\mathbb{R}$  de  $\mathcal{P}^+$  et donc sur  $\mathcal{P}^+$ .

$\Gamma$  serait alors de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{P}^+$  et vérifierait la condition de Cauchy–Riemann.

On en conclurait que  $\Gamma$  est holomorphe sur  $\mathcal{P}^+$  et que

$$\forall z \in \mathcal{P}^+, \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t} dt$$

• **Logarithme complexe**

On se propose ici de prolonger la fonction  $\ln$  sur un ouvert “maximal”  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ , en une fonction holomorphe, tout en conservant la propriété :  $\forall z \in \Omega, e^{\ln z} = z$ .

**Analyse algébrique** (le jeu de mots nous vous aura pas échappé).

Notons que si  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ , ( $e^\omega$  ne peut être nul puisque  $|e^\omega| = e^{\operatorname{Re}(\omega)} > 0$ )

$$e^\omega = z \iff |e^\omega| = |z| \text{ et } \operatorname{Arg}(e^\omega) = \operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$$

$$\iff e^{\operatorname{Re}(\omega)} = |z| \text{ et } \operatorname{Im}(\omega) = \operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$$

$$\iff \operatorname{Re}(\omega) = \ln|z| \text{ et } \operatorname{Im}(\omega) = \operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$$

$$\iff \omega = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad [2\pi]$$

On peut constater dès lors qu’une définition analytique de  $\ln(z)$  reposera entièrement sur une bonne définition de  $\operatorname{Arg}(z)$ , et que déjà il est possible de donner plusieurs définition à  $\ln(z)$  selon la détermination de  $\operatorname{Arg}(z)$  qu’on choisira (le modulo  $2\pi$ ).

**Construction analytique :**

Soit maintenant  $z \in \mathbb{C}^*$  et posons  $z = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On pose aussi  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  et soit  $\theta$  la détermination de  $\text{Arg}(z)$  qui se trouve dans l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ .

On a alors sous caution :  $\frac{y}{x+r} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = \frac{2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$

Sous caution parce que si  $y = 0$  et  $x \leq 0$  le quotient  $y/(x+r)$  serait indéterminé. On devrait alors scarifier ces points (sur l'autel de baptême de Saint-Logarithme), en posant  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Tant mieux parce que dans ce cas  $\theta$  serait pris dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$  ce qui règle aussi le problème de définition de  $\tan(\theta/2)$  et même de faire jouer  $\arctan$ . Ayant  $\theta/2 \in ] -\pi/2, \pi/2[$  la dernière égalité est équivalente à

$$\theta = 2 \arctan \left( \frac{y}{x+r} \right)$$

On fonce maintenant, en posant

$$\forall z = x + iy \in \Omega, f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

C'est là une jolie fonction qui vérifie de par sa construction  $e^{f(z)} = z$ . On justifie sans peine (ou alors avec peu de peine) qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

Maintenant qu'on sait que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  on dérive partiellement l'égalité  $e^{f(z)} = z$  par rapport à  $x$  et à  $y$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (e^{f(z)}) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} (e^{f(z)}) = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(\exp)(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 1 \\ d(\exp)(f(z)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(z) e^{f(z)} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) e^{f(z)} = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = e^{-f(z)} = \frac{1}{z} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) = i e^{-f(z)} = \frac{i}{z} \end{cases}$$

$f$  qui est de  $\mathcal{C}^1$  vérifie donc la condition Cauchy-Riemann, elle est donc holomorphe sur  $\Omega$ . Avec comme on pouvait s'y attendre

$$\forall z \in \Omega, f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{1}{z}$$

**Résumons :** On pose  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et pour tout  $z = x + iy \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \ln|z| + i \arg z$$

$\arg z$  désignant ici la détermination de l'argument de  $z$  dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$ .

$f$  est une fonction holomorphe sur  $\Omega$  vérifiant :

$$\forall z \in \Omega, e^{f(z)} = z \text{ et } f'(z) = \frac{1}{z}$$

**Vocabulaire :** On appelle détermination du logarithme complexe sur  $\Omega$  toute fonction  $g$  holomorphe sur  $\Omega$  et telle que :  $\forall z \in \Omega, e^{g(z)} = z$

La fonction  $f$  ci-dessus est appelée détermination principale du logarithme complexe sur  $\Omega$ , on la note  $\ln$ .

**Exercice 1**

Soit  $g$  une détermination du logarithme complexe sur l'ouvert  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

1. Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ ,  $e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .
2. Montrer que  $\Omega$  est connexe par arcs.
3. Montrer alors qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\forall z \in \Omega, g(z) = \ln z + 2ik\pi$   
( $k$  ne dépend que de  $g$  pas de  $z$ ).
4. Soit maintenant  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On pose  $h(z) = \ln(ze^{-i\alpha}) + i\alpha$ 
  - a) Préciser l'ouvert  $\Omega_\alpha$  sur lequel est définie  $h$ .
  - b) Montrer que  $h$  est une détermination du logarithme complexe sur  $\Omega_\alpha$ .

La proposition suivante nous sera utile dans la suite de ce cours.

**Proposition 3**

Soit une fonction holomorphe  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(I) \subset \Omega$ .

Alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$$

2. Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(s, t) \mapsto \Phi(s, t)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\Phi(V) \subset \Omega$ .

Alors  $f \circ \Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$  et pour tout  $(s, t) \in V$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial s}(s, t) = f'(\Phi(s, t)) \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \\ \frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial t}(s, t) = f'(\Phi(s, t)) \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \end{cases}$$

**Démonstration** — 5 Les deux énoncés découlent de l'expression de la différentielle de la fonction holomorphe  $f$  et des résultats de calcul différentiel rappelé au début de ce cours.

## 2 Fonctions de classe $C^\infty$ , fonctions analytiques

### 1 Définitions et premières propriétés

#### Définition 2

Soit une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

1.  $f$  est dite de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est holomorphe sur } \Omega \\ f' \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

( Si, si cela fonctionne très bien).

On définit alors la suite des fonctions dérivées successives  $(f^{(n)})_n$  de  $f$  par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \end{cases}$$

2.  $f$  est dite analytique sur  $\Omega$ , si et seulement pour tout  $z_0 \in \Omega$ ,  $f$  est "développable en série entière sur un voisinage de  $z_0$ ", c'est à dire

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists r > 0, \exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; D(z_0, r) \subset \Omega \text{ et } \forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

#### Remarques :

- On montrera dans ce paragraphe que toute fonction holomorphe est de classe  $C^\infty$ , on comprend alors pourquoi il est inutile de parler, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , de fonctions de classe  $C^n$  de la variable complexe.

#### Lemme 1

Soit une suite  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^{n-1}$  ont le même rayon de convergence.

**Démonstration – 6** Soient  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence respectifs des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^{n-1}$ .

Soit  $z \in D(0, R)$ , et soit alors  $r \in ]|z|, R[$ . pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|n a_n z^{n-1}| = n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} |a_n| r^n \text{ avec } n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc  $n a_n z^{n-1} = o(|a_n| r^n)$ . Comme  $r < R$  alors la série  $\sum |a_n| r^n$  converge et donc  $\sum n a_n z^{n-1}$  converge.

Alors  $R' \geq R$ .

Inversement  $a_n z^n = O(n a_n |z|^{n-1})$  implique que  $\sum a_n z^n$  converge si  $\sum n a_n z^{n-1}$  converge absolument. Alors  $R \geq R'$ .

Ainsi  $R' = R$ .

#### Proposition 4

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , et soit  $f$  sa somme sur le disque ouvert  $D(0, R)$

1.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D(0, R)$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

3. Pour tout  $r \in ]0, R[$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

#### Démonstration – 7 .

1. Montrons d'abord que  $f$  est holomorphe sur  $D(0, R)$ .

Soit  $z_0 \in D(0, R)$ . Pour tout  $z \in D(0, R) \setminus \{0\}$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z)$$

où on a posé  $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}$ . Posons  $\rho = \frac{1}{2}(|z_0| + R)$  si  $R$  est fini,  $\rho = 1 + |z_0|$  si  $R$  est infini. Dans les deux cas on a  $|z_0| < \rho < R$ .

Pour tout  $z \in D(0, \rho)$ ,  $|a_n u_n(z)| \leq n |a_n| \rho^{n-1}$

La série entière  $\sum n a_n z^{n-1}$  a le même rayon de convergence que  $\sum a_n z^n$ , a savoir  $R$ . Comme  $\rho < R$  alors la série  $\sum n |a_n| \rho^{n-1}$  est convergente et donc la série de fonctions  $\sum a_n u_n$  CVN sur le disque  $D(0, \rho)$ . Les fonctions  $u_n$  étant

continues, la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n$  est donc continue sur  $D(0, \rho)$  et en particulier en  $z_0$ . On en déduit que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

Alors  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ , et  $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$ , ceci pour tout  $z_0 \in D(0, R)$ .

$f'$  est elle même la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$ , elle est donc continue sur  $D(0, R)$ . Ainsi  $f$  est holomorphe sur  $D(0, R)$  et

$$\forall z \in D(0, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

$f'$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$ , ce qui précède démontre qu'elle est elle même holomorphe. On démontre ainsi par récurrence que  $f$  et toutes ses dérivées sont holomorphes. Alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$

$$\forall z \in D(0, R), f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) z^{n-p}$$

2. Découle immédiatement de l'expression de  $f^{(p)}$  donnée précédemment.

3. Soit  $r \in ]0, R[$ , et soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(re^{i\theta})e^{-ip\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{N}, |a_n r^n e^{i(n-p)\theta}| = |a_n| r^n.$$

$0 < r < R$  donc la série  $\sum |a_n| r^n$  converge et donc la série de fonction  $\sum a_n r^n e^{i(n-p)\theta}$  CVN sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Une intégration terme à terme est donc possible, et sachant que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = 2\pi\delta_{k0}$ , elle donne

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta} d\theta = 2\pi a_p r^p$$

**Exercice 2**

**Théorème de Liouville**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence infini, et soit  $f$  sa somme sur  $\mathbb{C}$ .

Montrer que si  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ , alors  $f$  est constante.

**Corollaire 1**

Soit  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega$

1.  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

2. Soit  $z_0 \in \Omega$ , et soit  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset \Omega$  et

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

- $\forall \rho \in ]0, r[, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$

**Démonstration – 8** Soit  $z_0 \in \Omega$  et soient  $r > 0$  et  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tels que

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Posons alors pour tout  $h \in D(0, r)$ ,  $g(h) = f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ .

$g$  est la somme d'une série entière sur  $D(0, r)$ , elle est donc de classe  $C^\infty$  sur  $D(0, r)$ .

Maintenant puisque pour tout  $z \in D(z_0, r)$ ,  $f(z) = g(z - z_0)$  alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D(z_0, r)$ .

Ainsi pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  tel que  $f$  soit de classe  $C^\infty$  sur  $D(z_0, r)$ . Elle est donc de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

Ensuite, en reprenant la fonction  $g$  définie précédemment pour le point  $z_0$  on aura pour

tout  $n \in \mathbb{N}$   $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

et pour tout  $\rho \in ]0, r[, a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

**Remarques :**

- Soit  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega$  et soit  $z_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  et  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tels que

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Soit  $\rho \in ]0, r[$ . On a alors pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$

$$f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}$$

En posant  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ , l'expression intégrale du coefficient  $a_n$  donne  $c_n = a_n \rho^n$  et donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

On reconnaît là le développement en série de Fourier de la fonction de classe  $C^\infty$ ,  $2\pi$ -périodique  $\theta \mapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ , qui obligatoirement va vérifier  $c_n = 0$  si  $n < 0$ .

Cette observation servira de base dans la démonstration de l'analyticité d'une fonction holomorphe.

## 2 Analyticit  d'une fonction holomorphe

### Théorème 2

Toute fonction holomorphe sur  $\Omega$  est analytique sur  $\Omega$ .

Plus précisément, soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  et soit  $z_0 \in \Omega$ . Posons

$$R = \sup\{r > 0 / D(z_0, r) \subset \Omega\}$$

avec la convention  $R = +\infty$  si ce dernier ensemble n'est pas majoré.

Alors il existe une suite  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

**Démonstration** — 9 (D'après CNC 2008 MATHS I)

Soit  $z_0 \in \Omega$ . Le fait que  $\Omega$  soit un ouvert assure que l'ensemble  $\{r > 0 / D(z_0, r) \subset \Omega\}$  est non vide, s'il est majoré on note  $R$  sa borne supérieure, sinon on pose  $R = +\infty$ . (Noter qu'on ne peut avoir  $R = +\infty$  que si  $\Omega = \mathbb{C}$  parce qu'on devrait avoir :  $\forall r > 0, D(0, r) \subset \Omega$ )

Soit maintenant  $\rho \in ]0, R[$  et considérons la fonction  $\varphi : \theta \mapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$\varphi$  est une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^1$  comme composée d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et d'une fonction holomorphe. Sa série de Fourier converge donc normalement sur  $\mathbb{R}$  et sa somme est  $\varphi$ .

Posons pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

On a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \varphi(\theta) = f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\rho) e^{in\theta} \tag{1}$$

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  et intéressons nous maintenant à la fonction

$$c_n : \rho \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \rho \in [0, R[.$$

Pour cela on considère la fonction  $\Psi : (\rho, \theta) \mapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta})$  définie sur  $U = [0, R[ \times [0, 2\pi[$ , de sorte que pour tout  $\rho \in [0, R[$

$$c_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

$\Psi$  est la composée de la fonction  $(\rho, \theta) \mapsto z_0 + \rho e^{i\theta}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et de la fonction  $f$  qui est holomorphe sur  $\Omega$ , une proposition du paragraphe précédent affirme que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et que  $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) \frac{\partial}{\partial \rho}(z_0 + \rho e^{i\theta}) = e^{i\theta} f'(z_0 + \rho e^{i\theta})$

Alors  $c_n$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, R[$  d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (sur un segment) et

$$\forall \rho \in [0, R[, c'_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

Soit  $\rho \in ]0, R[$ , en utilisant la fonction  $\theta \mapsto f'(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{i\theta}$  dérivée de la fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\theta \mapsto \frac{1}{i\rho} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ , une intégration par parties donne

$$c'_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{-in\theta}}{i\rho} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{i\rho} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) = \frac{n}{\rho} c_n(\rho)$$

La fonction  $c_n$  est donc une solution sur  $]0, R[$  de l'équation différentielle :  $\rho \frac{dc}{d\rho} - nc = 0$

On en déduit qu'il existe une constante  $a_n$  telle que

$$\forall \rho \in ]0, R[, c_n(\rho) = a_n \rho^n$$

Comme  $c_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, R[$ , elle est continue en 0. L'expression de  $c_n$  implique alors forcément que  $a_n = 0$  si  $n < 0$ . et donc

$$n < 0 \implies \forall \rho \in [0, R[, c_n(\rho) = 0$$

La relation (1) devient alors :

$$\forall \rho \in [0, R[, \forall \theta \in \mathbb{R}, f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}$$

Puisque tout élément de  $D(z_0, R)$  peut s'écrire sous la forme  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$  où  $\rho \in [0, R[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  alors

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

### Corollaire 2

Toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$ . En particulier  $f'$  est aussi holomorphe sur  $\Omega$ .

### APPLICATIONS :

↗ Soit  $f$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Si  $f$  ne s'annule pas sur  $D(0, R)$ , alors  $\frac{1}{f}$  est développable en série entière sur  $D(0, R)$ .

En effet ;  $\frac{1}{f}$  est holomorphe sur  $D(0, R)$  donc elle est analytique sur  $D(0, R)$ . Si  $R'$  est le rayon de convergence de son développement en 0 alors

$$R' \geq \sup\{r > 0 / D(0, r) \subset D(0, R)\}, \text{ soit } R' \geq R.$$

↗  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos

Tout polynôme non constant à coefficients dans  $\mathbb{C}$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ . (On en déduit ensuite que tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé).

**En effet;** soit  $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ .

Supposons que  $P$  n'admet pas de racines dans  $\mathbb{C}$ , et montrons qu'il est forcément constant.

$P$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$  donc la fonction  $f = 1/P$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  on peut écrire

$$P(z) - a_n z^n = z^n \left( \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

avec

$$\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc  $P(z) - a_n z^n = o(|z|^n)$ . On en déduit que  $|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n| |z|^n$  et donc que  $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$

il existe donc  $R > 0$  tel que :  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \implies |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq 1$ .

$f$  étant continue sur le compact  $\overline{D}(0, R)$  elle y est bornée, en posant

$$M = \max(1, \sup_{|z| \leq R} |f(z)|)$$

on a alors :  $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$ .

$f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et elle est bornée sur  $\mathbb{C}$ . D'après le théorème de Liouville, elle est constante sur  $\mathbb{C}$ .  $P$  est donc constant sur  $\mathbb{C}$ .

### 3 Principe des zéros isolés

**Lemme 2**

On suppose que  $\Omega$  est connexe par arcs. Soit  $W$  une partie de  $\Omega$ .

Si  $W$  est à la fois un ouvert et un fermé relatifs de  $\Omega$  alors il est soit vide soit égal à  $\Omega$ .

**Démonstration — 10** Supposons par l'absurde que  $W$  est un fermé et un ouvert relatifs de  $\Omega$  et qu'il est non vide et inclu strictement dans  $\Omega$ .

Posons alors  $F = \Omega \setminus W$ .  $W$  et  $F$  sont des fermés relatifs non vides de  $\Omega$ . Soient donc  $a \in W$  et  $b \in F$ .  $\Omega$  est connexe par arcs, il existe donc une fonction continue  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$  telle que  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(1) = b$ .

Par continuité de  $\varphi$  les ensembles  $J = \varphi^{-1}(W)$  et  $K = \varphi^{-1}(F)$  sont des fermés de  $[0, 1]$  et donc de  $\mathbb{R}$ , qui forment en plus une partition de  $[0, 1]$ .

$J$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$ , elle admet donc une borne supérieure  $\beta$ , et puisque  $J$  est fermé alors  $\beta \in J$ .  $1 \in K$  donc  $\beta < 1$  et puisque  $\beta = \sup J$  alors  $]\beta, 1] \subset K$ ,

$K$  étant lui-même un fermé, le fait d'avoir  $\beta \notin K$  et  $]\beta, 1] \subset K$  mène à une contradiction.

**Lemme 3**

On suppose que  $\Omega$  est connexe par arcs. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ .

S'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$$

Alors  $f$  est nulle sur  $\Omega$ .

**Démonstration — 11** On suppose qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que  $f^{(n)}(z_0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On considère alors l'ensemble non vide

$$W = \{z \in \Omega / \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = 0\}$$

$W$  est un fermé relatif de  $\Omega$

$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( f^{(n)} \right)^{-1}(\{0\})$$

les ensembles  $\left( f^{(n)} \right)^{-1}(\{0\})$  sont des fermés de  $\Omega$  car ils sont des images réciproques du fermé  $\{0\}$  par des applications continues.  $W$  est donc une intersection de fermés de  $\Omega$ , il est lui-même un fermé de  $\Omega$ .

$W$  est un ouvert relatif de  $\Omega$ .

Soit  $\omega \in W$ ,  $f$  étant holomorphe sur  $\Omega$ , elle est analytique sur  $\Omega$ . il existe donc  $r > 0$  tel que  $D(\omega, r) \subset \Omega$  et

$$\forall z \in D(\omega, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$$

et puisque  $\omega \in W$  alors  $f$  est nulle sur  $D(\omega, r)$  et donc  $D(\omega, r) \subset W$ .

Ainsi  $W$  est un ouvert relatif de  $\Omega$

**Conclusion :**  $W$  est un ouvert et un fermé relatifs de  $\Omega$ , qui est non vide. D'après le premier lemme, il est égal à  $\Omega$ .  $f$  ainsi que ses dérivées successives sont donc nulles sur  $\Omega$ .

**Théorème 3**

**Principe des zéros isolés**

On suppose que l'ouvert  $\Omega$  est connexe par arcs.

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  qu'on suppose non partout nulle sur  $\Omega$ . Soit  $z_0 \in \Omega$ .

On suppose que  $z_0$  est un zéro de  $f$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset \Omega$  et

$$\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}, f(z) \neq 0$$

On dit que les zéros de  $f$  sont des points isolés de  $\Omega$ .

**Démonstration — 12** Puisque  $f$  est non nulle, d'après le deuxième lemme il existe au moins un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Soit donc

$$p = \min \{n \in \mathbb{N} / f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

$f$  est analytique donc il existe  $\rho > 0$  tel que  $D(z_0, \rho) \subset \Omega$  et

$$\forall z \in D(z_0, \rho), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

et par définition de  $p$

$$\forall z \in D(z_0, \rho), f(z) = (z - z_0)^p g(z) \text{ avec } g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-p}$$

$g(z_0) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$  et  $g$ , somme d'une série entière, est continue sur  $D(z_0, \rho)$ .

La continuité de  $g$  en  $z_0$  assure l'existence d'un  $r \in ]0, \rho]$  tel que pour tout  $z \in D(z_0, r)$ ,  $|g(z)| \geq \frac{1}{2} |g(z_0)| > 0$ .

On a alors :  $\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}, f(z) = (z - z_0)^p g(z) \neq 0$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ . On note  $Z_f$  l'ensemble des zéros de  $f$  dans  $\Omega$ .

1. Montrer que  $Z_f$  est un fermé.
2. Montrer que toute suite convergente d'éléments de  $Z_f$  est forcément stationnaire.
3. En déduire que si  $Z_f$  est borné alors il est fini.

### Exercice 4

$\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , et  $f$  sa somme sur  $D(0, R)$ . On suppose que  $f(0) \neq 0$ . On reprend la notation  $Z_f$  de l'exercice précédent et on suppose que  $Z_f \neq \emptyset$ .

1. Montrer que  $d(0, Z_f) > 0$ . On pose  $r = d(0, Z_f)$ .
2. Montrer que  $\frac{1}{f}$  est développable en série entière sur  $D(0, r)$ .

### Exercice 5

#### Principe du prolongement analytique

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .

Utiliser le principe des zéros isolés pour montrer que si  $f$  et  $g$  prennent les mêmes valeurs au voisinage d'un point quelconque de  $\Omega$  alors elles sont partout égales sur  $\Omega$ .  
( ... Pfiouuu. )