

Espaces vectoriels normés

B. Seddoug, Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Norme et distance	1
I.1 Définitions	1
I.2 Evn produit	12
I.3 Notions topologiques de base	15
II Notion de convergence dans un evn	21
II.1 Suites dans un evn	21
II.2 Limite et continuité en un point	31
II.3 Propriétés globales des fonctions continues . .	39
II.4 Fonctions de plusieurs variables réelles	43

I Norme et distance

Dans tout le chapitre on se place dans le cadre d'espaces vectoriels E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I.1 Définitions

Définition I.1 On appelle norme dans E , une application N telle que :

- (i) $\forall x \in E : N(x) \in \mathbb{R}_+$
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- (iii) $\forall (x, y) \in E^2 : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- (iv) $N(x) = 0 \iff x = 0$

①

E muni de N est appelé un **espace vectoriel normé** (evn). Sans la propriété (iv), on dit que N est une semi norme.

- Souvent on note $\|x\|$ pour $N(x)$. On différencie le cas échéant diverses normes par des indices : $\|x\|_1, \|x\|_2, \dots$

Dans toute la suite on suppose que E est muni d'une norme $\| \cdot \|$.

Remarque I.1 De la définition on déduit que

- $\|-x\| = \|x\|$ et dans le cas complexe, $\|e^{i\theta}x\| = \|x\|$.
- Dans un evn, on a $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$!!!
- L'inégalité suivante est souvent utile :

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

②

Exercice I.1 Montrer que les applications suivantes sont des normes :

- (1) Le module dans \mathbb{C} .
- (2) Dans \mathbb{R}^2 , les applications :

$$X = (x, y) \mapsto \|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$X = (x, y) \mapsto \|X\|_\infty = \sup(|x|, |y|);$$

$$X = (x, y) \mapsto \|X\|_1 = |x| + |y|.$$

- (3) Dans $\mathbb{R}[X]$, l'application :

$$P \mapsto \|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)|$$

③

montrer d'abord que cette application est bien définie.

- (4) Dans le sous espace E de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques complexes bornées, l'application définie par

$$\mathbf{u} = (u_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|\mathbf{u}\|_\infty$$

- (5) Dans l'espace des applications **continues** (semi norme) de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} :

$$f \mapsto \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Définition I.2 La distance entre les points x et y de E est

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

④

Propriétés

On a les propriétés suivantes, qui résultent des axiomes définissant une norme.

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Distance d'un point à une partie de E

Définition I.3 Soit $x \in E$ et $A \subset E, A \neq \emptyset$; alors on pose

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

⑤

Proposition I.1 Il existe une suite (a_n) dans A telle que

$$d(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, a_n).$$

Preuve: Utiliser la caractérisation de l'inf avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$...

Remarque I.2 Il n'est pas nécessaire que $x \in A$ pour avoir $d(x, A) = 0$.

Exemple : $A = [0, 1[$, $d(1, A) = 0$.

Exercice I.2 Calculer la distance de l'application

$$r : x \mapsto \sqrt{x}$$

⑥

<p>à l'ensemble A des applications linéaires $f_a : x \mapsto ax$ dans l'espace E des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme définie par $\ f\ _1 = \int_0^1 f(t) dt$.</p> <p>Solution: Pour tout $a \in \mathbb{R}$;</p> $d(r, f_a) = \int_0^1 \sqrt{t} - at dt$ $= \int_0^1 \sqrt{t} 1 - a\sqrt{t} dt,$ <p style="text-align: right;">(7)</p>	<p>donc</p> $d(r, f_a) = \begin{cases} \int_0^1 (\sqrt{t} - at) dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}a & \text{si } a \leq 1 \\ \int_0^{1/a^2} (\sqrt{t} - at) dt - \int_{1/a^2}^1 (\sqrt{t} - at) dt \\ = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3a^3} - \frac{2}{3} & \text{si } a > 1 \end{cases}$ <p>il s'agit donc de chercher le minimum de la fonction en a ainsi définie.</p> <p style="text-align: right;">(8)</p>
<p>Boules</p> <p>Définition I.4 On définit les boules ouvertes et fermées de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$ par :</p> <ul style="list-style-type: none"> $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$ $B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$ <p>$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$ est la sphère de centre a et de rayon r.</p> <p>Exercice I.3 Dessiner la boule $B_f(0, 1)$ pour les trois normes sur \mathbb{R}^2 données dans l'exercice I.1.</p> <p>Exercice I.4 Montrer que si deux boules ouvertes ont un point commun, alors elles contiennent toutes deux une même boule (ouverte) centrée sur ce point.</p> <p style="text-align: right;">(9)</p>	<p>Partie bornée, application bornée</p> <p>Définition I.5 Une partie A de E est bornée si</p> $\exists M > 0 \mid \forall x \in A : \ x\ \leq M.$ <p>Soit X un ensemble non vide, une application $f : X \rightarrow E$ est bornée si</p> $\exists M > 0 \mid \forall x \in X : \ f(x)\ \leq M.$ <p>Remarque I.3 Il est facile de voir que la réunion, l'intersection de deux bornés est bornée. Et que l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est un $\mathbb{K} - ev$.</p> <p>Exercice I.5 Montrer que la somme de deux bornés :</p> $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ <p style="text-align: right;">(10)</p>
<p>est bornée.</p> <p>Théorème I.1 Soit X un ensemble non vide, l'application</p> $f \mapsto \ f\ _\infty = \sup_{x \in X} \ f(x)\ $ <p>est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E.</p> <p>Exercice I.6 Démontrer le théorème ci-dessus.</p> <p style="text-align: right;">(11)</p>	<p>Normes équivalentes</p> <p>Définition I.6 On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, s'il existe α, β réels strictement positifs tels que</p> $\forall x \in E : \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ <p>Exercice I.7 Comparer deux à deux les trois normes sur \mathbb{R}^2 données dans l'exercice I.1 (2).</p> <p>I.2 Evn produit</p> <p>Proposition I.2 Si E et F sont deux evn, on définit sur $E \times F$ une norme, par</p> $\forall (x, y) \in E \times F : \ (x, y)\ = \sup(\ x\ , \ y\)$ <p style="text-align: right;">(12)</p>
<p>appelée norme produit sur $E \times F$.</p> <p>Plus généralement, pour un produit de n espaces E_1, \dots, E_n on pose</p> $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i :$ $\ x\ = \sup_{1 \leq i \leq n} (\ x_i\)$ <p>Remarque I.4 La norme produit ci-dessus est notée $\ \cdot\ _\infty$.</p> <p style="text-align: right;">(13)</p>	<p>Deux autres normes sont définies sur le produit $\prod_{i=1}^n E_i$:</p> $\ (x_1, \dots, x_n)\ _1 = \sum_{i=1}^n \ x_i\ \quad \text{et}$ $\ (x_1, \dots, x_n)\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n \ x_i\ ^2 \right)^{1/2}$ <p>En particulier, on définit sur \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) les trois normes suivantes, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:</p> $\ x\ _\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} x_i , \quad \ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \ x\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i ^2 \right)^{1/2}$ <p style="text-align: right;">(14)</p>

<p>Exercice I.8 Montrer que l'on définit ainsi des normes sur \mathbb{K}^n. Et que les trois normes sont équivalentes.</p> <p>I.3 Notions topologiques de base</p> <p>Voisinages, Intérieur, adhérence, frontière</p> <p>Définition I.7 On dit qu'une partie $V \subset E$ est un voisinage de $a \in E$ si V contient une boule $B(a, r)$ ($r > 0$). Dans ce cas $a \in V$ et on dit que a est un point intérieur à V.</p> <p>On note $\overset{\circ}{V}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à V et on l'appelle l'intérieur de V :</p> $a \in \overset{\circ}{V} \iff \exists r > 0 : B(a, r) \subset V \tag{15}$	<p>On dit que $a \in E$ est adhérent à V si toute boule $B(a, r)$ rencontre V.</p> <p>On note \bar{V} l'ensemble de tous les points adhérents à V et on l'appelle l'adhérence de V :</p> $a \in \bar{V} \iff \forall r > 0 : B(a, r) \cap V \neq \emptyset$ <p>Ainsi on a</p> $\overset{\circ}{V} \subset V \subset \bar{V}$ <p>on appelle frontière de V l'ensemble $Fr(V) = \bar{V} \setminus \overset{\circ}{V}$.</p> <p>Propriétés</p> <p>(1) Adhérence et intérieur respectent l'inclusion. (16)</p>
<p>(2) Les voisinages sont les mêmes pour deux normes équivalentes.</p> <p>Exemples</p> <p>(1) Si $V = [0, 1[\times]2, 3]$ alors $\overset{\circ}{V} =]0, 1[\times]2, 3[$, $\bar{V} = [0, 1] \times [2, 3]$.</p> <p>(2) L'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $B_f(a, r)$.</p> <p>(3) L'intérieur de la boule fermée $B_f(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.</p> <p>(4) La frontière des boules ouvertes ou fermées $B(a, r)$ (ou $B_f(a, r)$) est la sphère $S(a, r)$. (17)</p>	<p>Définition I.8 On dira que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.</p> <p>Exemple I.1 On sait par exemple que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R}.</p> <p>Ouverts, fermés</p> <p>Définition I.9 On dit que $U \subset E$ est ouvert si $\overset{\circ}{U} = U$. i.e :</p> $\forall a \in U, \exists r > 0 : B(a, r) \subset U.$ <p>On dit que $V \subset E$ est fermé si $\bar{V} = V$ (ce qui signifie $\bar{V} \subset V$), i.e. $\forall a \in E$</p> $[\forall r > 0, B(a, r) \cap V \neq \emptyset] \implies a \in V \tag{18}$
<p>Exemples</p> <p>(1) L'ensemble \emptyset est par convention ouvert et fermé. Aussi E est à la fois ouvert et fermé.</p> <p>(2) Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. (Prouver cette dernière assertion).</p> <p>(3) tout point, toute partie finie, est fermé(e).</p> <p>(4) une sphère $S = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$ est fermée.</p> <p>Proposition I.3 L'intérieur du complémentaire est le complémentaire de l'adhérence. L'adhérence du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur :</p> $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A} \text{ et } \overset{\circ}{E \setminus A} = E \setminus \bar{A} \tag{19}$	<p>et donc</p> <p>A est un fermé si et seulement si A^c est un ouvert.</p> <p>Preuve: Procéder par double inclusion (par exemple)</p> <p>Propriétés</p> <p>(1) Toute réunion (même infinie) d'ouverts est ouverte.</p> <p>(2) L'intersection de deux (ou même d'un nombre fini d') ouverts est ouverte.</p> <p>(3) Toute intersection (même infinie) de fermés est fermée.</p> <p>(4) La réunion de deux (ou même d'un nombre fini de) fermés est fermée. (20)</p>
<p>(5) La frontière est toujours un fermé, et la frontière de A est aussi la frontière de son complémentaire.</p> <p>Exercice I.9 Montrer les propriétés ci-dessus.</p> <p>Exercice I.10 Montrer que tout ouvert engendre (par combinaisons linéaires) l'espace entier.</p> <p>II Notion de convergence dans un evn</p> <p>II.1 Suites dans un evn</p> <p>Définition II.1 La suite (u_n) converge vers ℓ si</p> $d(u_n, \ell) = \ u_n - \ell\ \tag{21}$	<p>est une suite réelle qui converge vers 0, i.e</p> $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 : \ u_n - \ell\ < \varepsilon$ <p>Si ce n'est pas le cas, on dit que la suite diverge.</p> <p>Propriétés</p> <p>Comme pour les suites numériques, on a les propriétés :</p> <p>(1) Une suite a au plus une limite.</p> <p>(2) Une suite convergente est bornée (réciproque fausse).</p> <p>(3) Le sous-ensemble des suites convergentes est un sev de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application $(u_n) \mapsto \lim u_n$ est linéaire. (22)</p>

<p>Remarque II.1 Espace des suites bornées (sous-espace vectoriel de l'espace des suites à valeurs dans E).</p> <p>Théorème II.1 Soit $E = F \times G$ un espace produit d'evn, muni de la norme produit. Alors une suite de E converge si et seulement si les suites de ses composantes convergent :</p> $u_n = (v_n, w_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (a, b)$ $\iff \left(v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \text{ et } w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b \right)$ <p>Preuve: facile, faites la</p> <p>Remarque II.2 Ceci se généralise à un produit d'un nombre quelconque (fini) d'evn. En particulier à \mathbb{K}^n, ce qui donne</p>	<p>Proposition II.1 Dans \mathbb{K}^n, une suite converge si et seulement si les suites des coordonnées convergent.</p> <p>Suites extraites</p> <p>Définition II.2 On appelle suite extraite (ou sous-suites) de la suite $(u_n)_n$ une suite de la forme $(u_{n_p})_p$ où $(n_p)_p$ est une suite d'entiers strictement croissante.</p> <p>Remarque II.3 Typiquement, on a les exemples des sous-suites paires et impaires (u_{2p}) et (u_{2p+1}). De même, les suites décalées (u_{n+1}) ou (u_{n+12}) sont des suites extraites.</p> <p>Les suites extraites partagent les propriétés de leur ancêtre : toute sous-suite d'une suite bornée (resp. convergente)</p>
<p>est bornée (resp. convergente).</p> <p>Proposition II.2 Les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers une même limite ℓ, montrer que (u_n) converge.</p> <p>Preuve: voir cours MPSI.</p> <p>Valeurs d'adhérence</p> <p>Définition II.3 ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui tend vers ℓ.</p>	<p>Exercice II.1 Soit (u_n) une suite majorée dans \mathbb{R} telle que</p> $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$ <p>montrer que $\sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.</p> <p>Remarque II.4 Le nombre de valeurs d'adhérence d'une suite peut être qlq.</p> <ol style="list-style-type: none"> $(1) u_n = n(-1)^n$: pas de valeurs d'adhérence. $(2) u_n = \frac{1}{n+1}$: une seule valeur d'adhérence, sa limite 0. $(3) (u_n) = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ tous les entiers $\neq 0$ sont répétés à l'infini et sont donc des valeurs d'adhérence.
<p>(4) $u_n = \sin n$ admet tous les points de $[-1, 1]$ comme valeurs d'adhérence (Exercice difficile).</p> <p>Proposition II.3 Toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite. Et donc une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.</p> <p>Preuve: C'est l'unicité de la limite.</p> <p>Exemple : La suite $u_n = n(1 + (-1)^n)$ n'a qu'une valeur d'adhérence (réelle) : 0, mais elle diverge.</p>	<p>Exercice II.2 Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose</p> $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{p \geq n} u_p \right) \text{ et}$ $\beta = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{p \geq n} u_p \right)$ <ol style="list-style-type: none"> (1) Montrer que α et β sont des valeurs d'adhérence de (u_n). (2) Montrer que toute valeur d'adhérence γ de (u_n), vérifie : $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. (3) Montrer que si $\alpha = \beta$ alors (u_n) est convergente de limite α. <p>Exercice II.3 L'ensemble A des valeurs de la suite convergente</p>
<p>(a_n) auquel on adjoint sa limite ℓ :</p> $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \ell$ <p>est fermé.</p> <p>Remarque II.5 (Comparaison de suites) Il n'est pas facile de comparer des vecteurs. Mais dans un evn on dispose des notions de taille, de grandeur, qui ramènent aux réels, et on peut ainsi comparer des suites vectorielles à des suites réelles.</p> <p>Définition II.4 On dit que (v_n) domine (u_n), ou que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$ si $\ u_n\ = O(\ v_n\)$</p> <p>On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$ si $\ u_n\ = o(\ v_n\)$</p>	<p>On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(\ u_n\)$.</p> <p>Caractérisation séquentielle des fermés</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) Un point adhérent à A est la limite d'une suite d'éléments de A. (2) L'adhérence de A est donc l'ensemble des limites des suites convergentes de E (à valeurs dans A). (3) Un ensemble fermé A est donc tel que toute suite à valeurs dans A et qui converge dans E a sa limite dans A. <p>Exemple II.1 l'adhérence de \mathbb{Q} est \mathbb{R} et l'adhérence de $]0, 1[$ est le segment $[0, 1]$.</p>

II.2 Limite et continuité en un point

Dans cette partie E et F sont deux \mathbb{K} - evn .

Définition II.5 Soit X une partie de E et $f : X \rightarrow F$, $a \in \overline{X}$. On dit que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = \ell \in F$ (ou que f converge en a) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in X : \\ \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

et on dit que f est continue en $a \in X$ si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$. Et si f est continue en tout point de X , on dit qu'elle est continue sur X .

(31)

Théorème II.2 Soit X une partie de E et $f : X \rightarrow F$, $a \in \overline{X}$. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = \ell \in F$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de X convergeant vers a , on a $(f(u_n))$ qui converge vers ℓ .

Preuve: en exercice (la même que pour les fonctions numériques).

En fait, l'équivalence ci-dessus, peut être plus fine : $f(x)$ converge en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de X convergeant vers a , $(f(u_n))$ converge (sans la condition $(f(u_n))$ converge vers ℓ).

Pour montrer que $(f(u_n))$ converge vers la même limite pour toutes les suites, on prend deux suites (v_n) et (w_n) puis construire une suite (u_n) par $u_{2n} = v_n$ et $u_{2n+1} = w_n \dots$

(32)

Remarque II.6 (Image continue d'une suite) Si (u_n) converge vers la limite ℓ et si f , définie en tout point de la suite, est continue en ℓ , alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$. En particulier Si une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ , et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$.

Opérations sur les limites

Comme pour les fonctions numériques, on a

Proposition II.4 Considérons des fonctions f, g , et φ de X dans F, F et \mathbb{K} respectivement. Alors si ces trois fonctions convergent en $a \in \overline{X}$, il en est de même de $f + g$, φf et, sous

(33)

la forme la plus générale :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + \varphi g) = \lim_{x \rightarrow a} (f) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi \lim_{x \rightarrow a} g$$

Remarque II.7 On en déduit donc que $\mathcal{C}^0(X, F)$ (ensemble des applications continues de X dans F) est un \mathbb{K} - ev , et même une algèbre si $F = \mathbb{K}$. On a aussi la continuité des applications $\|f\|$ (composée) et, si φ tend vers une limite numérique non nulle, de $1/\varphi$, ainsi donc que d'applications comme $f/\|f\|$ là où f ne s'annule pas. . .

Proposition II.5 La composée de deux applications continues est continue. De manière plus précise

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{t \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)} g(t)$$

(34)

si f et g sont composables et possédant les limites indiquées.

Preuve: la faire en exercice

Caractérisation de la convergence dans un espace produit

On peut aussi décomposer une application continue, quand celle-ci arrive dans un espace produit. On l'a vu pour les suites, d'après le Théorème II.2 c'est pareil pour les applications :

Proposition II.6 Soit f une application de X dans $E \times F$ et a adhérent à X , alors f converge en a si et seulement si ses deux composantes convergent :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x), f_2(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \right)$$

(35)

De même pour un produit fini d'espaces vectoriels normés. En particulier, une application à valeurs dans \mathbb{K}^n est continue si et seulement si toutes ses composantes le sont.

Extension de la notion de limite

limite en $\pm\infty$ d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans F ,

Définition II.6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow F$. On dit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in F$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|f(x) - \ell\| = 0$.

limite infinie d'une application de X dans \mathbb{R} en un point adhérent à X

(36)

Définition II.7 Soit $f : X \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X .

- on dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in X : \\ \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \geq A$$

- on dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in X : \\ \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \leq A.$$

Remarque II.8 Les résultats sur les opérations des limites des fonctions numériques sont conservées.

(37)

Comparaison de fonctions

On étend les définitions de comparaison des fonctions numériques :

Définition II.8 Soit $f, g : X \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X .

- On dit au voisinage de a que $f = o(g)$ si $\|f\| = o(\|g\|)$
- On dit au voisinage de a que g domine f ou encore que $f = O(g)$ si $\|f\| = O(\|g\|)$
- On dit au voisinage de a que g et f sont équivalente (on note $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ si $f - g = o(g)$)

(38)

<p>II.3 Propriétés globales des fonctions continues</p> <p>Définition II.9 Si A est une partie de E, on appelle ouvert de A l'intersection de A avec un ouvert de E.</p> <p>Théorème II.3 Une application $f : A \subset E \rightarrow F$ est continue sur E si et seulement si l'image inverse par f de tout ouvert de F est un ouvert de A.</p> <p>Remarque II.9 Donc de même, si f est continue, alors l'image inverse par f de tout fermé de F est un fermé de A.</p> <p>Exercice II.4 Utiliser les définitions pour montrer l'équivalence précédente.</p> <p style="text-align: right;">(39)</p>	<p>Proposition II.7 Si f est continue de A dans \mathbb{R}, alors les ensembles $\{f \leq m\}$ et $\{f = m\}$ sont fermés, et $\{f < m\}$ est ouvert.</p> <p>Exemple II.2 Le groupe des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$ (déterminant = 1) est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</p> <p>Continuité et densité</p> <p>Proposition II.8 L'image continue d'une partie dense est dense. Autrement dit, si X est dense dans A et f est continue sur A dans l'evn F, alors $f(X)$ est dense dans $f(A)$.</p> <p>Preuve: utilise les suites.</p> <p style="text-align: right;">(40)</p>
<p>Théorème II.4 Deux applications continues sur A qui coïncident sur une partie dense de A sont égales sur A.</p> <p>Preuve: utilise la proposition précédente.</p> <p>Remarque II.10 On utilise souvent ce théorème sous une forme plus simple : si f et g coïncident sur $[a, b]$ et sont continues en b alors elles y sont égales.</p> <p>Preuve: Utilisons les suites : si f et g sont continues sur B, si A est dense dans B, tout point $b \in B$ est limite d'une suite (u_n) de A. Les suites $(f(u_n))$ et $(g(u_n))$ sont donc identiques, leurs limites — qui sont égales respectivement à $f(b)$ et $g(b)$ par continuité — se confondent par unicité de la limite. Donc $f(b) = g(b)$.</p> <p style="text-align: right;">(41)</p>	<p>Fonctions lipschitziennes</p> <p>Définition II.10 Soient E, F deux evn. L'application f de E dans F est dite lipschitzienne de rapport k si</p> $\forall x, y \in E : \ f(x) - f(y)\ \leq k \ x - y\ $ <p>Exemple II.3 Une application f de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que</p> $\sup f' \leq M$ <p>est M-lipschitzienne (TAF).</p> <p>Exercice II.5 Montrer que si les deux applications sont à la fois lipschitziennes et bornées alors le produit est lipschitzien.</p> <p style="text-align: right;">(42)</p>
<p>Exercice II.6 Montrer que la composée de deux applications lipschitziennes l'est encore.</p> <p>Exercice II.7 Montrer qu'une application lipschitzienne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie une inégalité de la forme</p> $ f(x) \leq A x + B.$ <p>Proposition II.9 Toute application lipschitzienne sur $D \subset E$ est uniformément continue sur D.</p> <p>II.4 Fonctions de plusieurs variables réelles</p> <p>\mathbb{R}^d étant un evn, donc les théorèmes généraux sur les limites et continuité sont aussi valables pour les fonctions de</p> <p style="text-align: right;">(43)</p>	<p>\mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^n, notamment :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Limites et continuité d'une application composée. • Continuité des fonctions polynomiales sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R}. • ... <p>Remarque II.11 La continuité d'une fonction</p> $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ $X \mapsto f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$ <p>équivaut à la continuité de chacune de ses composantes réelles f_i. Il suffit alors de savoir justifier la continuité des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}.</p> <p style="text-align: right;">(44)</p>
<p>On se limite dans la suite aux fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}. Les techniques proposées peuvent être facilement généralisées aux cas de fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}, voir de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$) dans \mathbb{R}.</p> <p>Fonctions partielles</p> <p>Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $(a, b) \in U$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. On définit sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}, la fonction</p> $\varphi_v : t \mapsto f((a, b) + tv) = f(a + tv_1, b + tv_2)$ <p>qu'on appelle fonction partielle de f en (a, b) suivant la direction de v.</p> <p style="text-align: right;">(45)</p>	<p>La limite $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_v(t)$, si elle existe, est appelée la limite de f suivant la direction v en (a, b). La proposition suivante est évidente.</p> <p>Proposition II.10 Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe alors il en est de même pour $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_v(t)$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.</p> <p>Remarque II.12 par contre la réciproque est fautive : il est possible que $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_v(t)$ existe pour tout v, mais que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ n'existe pas.</p> <p style="text-align: right;">(46)</p>

Exemple : au voisinage de $(0, 0)$, on considère

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq x^2 \text{ ou } y \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_v(t) = 0$, car

$$\varphi_v(t) = f(tv_1, tv_2) = 0 \text{ pour } t \text{ proche de } 0.$$

Par contre, f n'est pas continue en $(0, 0)$. Il suffit de considérer la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ pour le voir.

④⑦

Exemples

(1) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. f ne peut être prolongée par continuité en $(0, 0)$.

En effet : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$ mais $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$.

(2) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. f ne peut être prolongée par continuité en $(0, 0)$.

En effet : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 0$ mais $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 1$.

④⑧