Équations différentielles

B. Seddoug.

Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Équations différentielles non linéaires

Soit E un evn sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, Ψ est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}\times E$ dans E. Tous les intervalles considérés auront au moins deux éléments. On notera $\| \ \|$ une norme de E.

- On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre un :
$$y' = \Psi(x,y) \tag{I.1}$$
tout couple (I,φ) d'une fonction φ définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans E telle que
$$\forall x\in I : (x,\varphi(x))\in U \text{ et } \varphi'(x) = \Psi(x,\varphi(x)).$$

Proposition I.1. *Si est de classe $\mathcal{C}^k$, $k\in\mathbb{N}$, alors toute solution de (I.1) est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.*

- Soit $(x_0,y_0)\in U$. On appelle problème de Cauchy pour l'équation (I.1) associé à la condition initiale $y(x_0)=y_0$, le problème
$$\begin{cases} y' = \Psi(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{I.2}$$
qui consiste à déterminer les solutions (I,φ) de (I.1) qui vérifient en plus la condition
$$x_0\in I \text{ et } \varphi(x_0)=y_0.$$

Équation intégrale

Proposition I.2. *Une fonction φ est solution du problème de Cauchy (I.2) sur I si et seulement si*
$$\forall x\in I : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x}\Psi(t,\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

Preuve: conséquence immédiate de la relation :
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
vérifiée pour tout $x\in I$.

On admet les différentes formes du théorème de Cauchy :

Théorème I.1 (Cauchy). *Pour tout $(x_0,y_0)\in U$, sous certaines hypothèses, le problème de Cauchy (I.2) admet une unique solution (dans un sens qui sera précisé) dans chacun des cas suivants.*

I.1 Équations différentielles scalaires du premier ordre

- Dans cette section, on se limite au cas où $E=\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit alors que (I.1) est une *équation différentielle scalaire du premier ordre.*

Exemples

1. Équation linéaire de premier ordre : Il s'agit du cas où $\Psi(x,y) = a(x)y(x)+b(x)$. c.à.d l'équation est de la forme
$$y'(x) = a(x)y(x)+b(x).$$

2. Équations différentiels autonomes du premier ordre : Il s'agit du cas où Ψ ne dépend pas de la variable x c.à.d, l'équation est de la forme
$$y' = g(y).$$

3. Équations différentielles à variables séparables : Une équation différentielle scalaire du premier ordre est dite à

variables séparées (ou séparables), si $U = I\times J$ est un produit d'intervalles de $\mathbb{R}$ et si l'on peut écrire Ψsous la forme :
$$\Psi(x,y) = \frac{a(x)}{b(y)}$$
où $(a,b)\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})\times\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R}^*)$. Les solutions sont alors définies sur un sous intervalle de I à valeurs dans J. L'équation est alors de la forme
$$b(y)y' = a(x) \tag{I.3}$$

Proposition I.3. *Soient A une primitive de a, B une primitive de b. Un couple (Ω,y) (tel que $\Omega\subset I$) est solution de l'équation différentielle (I.3) si et seulement si*
$$\exists c\in\mathbb{R} \mid \forall x\in\Omega : B(y(x)) = A(x)+c.$$

En effet: voir cours MPSI.

Remarque. *Dans la pratique, on écrit* $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, *puis, symboliquement* $b(y)\,\mathrm{d}y = a(x)\mathrm{d}x$, *on a :*

$$b(y)\mathrm{d}y = a(x)\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int b(y)\mathrm{d}y = \int a(x)\mathrm{d}x$$

$$\Longleftrightarrow B(y(x)) = A(x) + c$$

Il s'agit donc de trouver des intervalles U sur lesquels B est bijective , et ensuite d'exprimer y en fonction de x et de c :

$$B(y) = A(x) + c \Longleftrightarrow y = B^{-1}(A(x) + c),$$

sur chaque intervalle Ω où $A(x) + c \in G(U)$.

7

Etude d'exemples d'équations à variables séparables

(1) $xy' \ln(x) = (3\ln(x) + 1)y$.

On peut "séparer les variables" (x et y) en divisant par $yx\ln(x)$, ce qui est permis si et seulement si $y \neq 0$ (car $x\ln(x) > 0$) d'après l'énoncé). l'équation s'écrit

$$\frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x \ln x}$$

et comme

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

donc toute solution y vérifie :

$$\ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + k = \ln|x^3 \ln x| + k,$$

8

avec $k \in \mathbb{R}$. En prenant l'exponentielle de cette expression, on a finalement :

$$y(x) = \lambda x^3 \ln x \text{ sur } \Omega =]1, +\infty[, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2) $y^2 y' = x^2$.

On a donc $y^2\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x$ et en intégrant $\dfrac{1}{3}y^3 = \dfrac{1}{3}x^3 + k$, on obtient donc la solution générale définie sur tout $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 + \lambda},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici $\sqrt[3]{\ }$ est supposée définie sur $\mathbb{R}$.

(3) $y' \ln(y) = e^x$.

9

On se ramène à $\ln(y)\mathrm{d}y = e^x\mathrm{d}x$ et en intégrant on obtient :

$$y\ln(y) - y = e^x + k, \ k \in \mathbb{R},$$

on remarque que l'on ne trouve pas une expression pour y mais une relation entre x et y.

- Il est clair que lorsque φ est une solution de (I.1), alors la restriction $\varphi_{|J}$ est aussi une solution pour tout sous-intervalle J de I. On est ainsi conduit à la définition suivante :

Définition. *On appelle **solution maximale** de (I.1) toute solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.*

*Si $U =]a, b[\times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$, on appelle **solution maximale à droite** de (I.1) toute solution (I, φ) qui ne peut être*

10

prolongée à droite de la borne sup de I.

Théorème I.2 (de Cauchy local). *Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors il existe une solution φ de (I.2) définie sur un intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ($\alpha > 0$). En plus si ψ est une autre solution définie sur un intervalle J, alors il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\forall x \in J \cap [x_0 - \beta, x_0 + \beta] : \varphi(x) = \psi(x) .$$

Théorème I.3 (Cauchy global). *On suppose Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Le problème (I.2) admet une unique solution maximale $y_{\max} :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$. Et toute autre solution est la restriction de $y_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\alpha, \beta[$.*

- Le théorème précise que la solution maximale est définie sur un **intervalle ouvert** et qu'elle ne peut pas être

11

prolongée (dans le cas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) en α, β.

Théorème I.4. *Soit $U =]a, b[\times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$. Si $(]\alpha, \beta[\,, \varphi)$ est solution maximale à droite de l'équation (I.1) alors $\lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: Si $\lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors ....

Définition. *Soit $U =]a, b[\times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. On appelle **solution globale** de (I.1), toute solution définie sur I tout entier.*

- Le théorème de Cauchy permet d'avoir aussi dans ce cas :

Proposition I.4. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$. Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times J$, il existe une*

12

unique solution maximale φ de (I.3) vérifiant les conditions de Cauchy $\varphi(x_0) = y_0$.

I.2 Sytèmes différentiels autonomes du premier ordre

- Dans cette section, on se limite au cas où $E = \mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et

$$\Psi : \left| \begin{array}{c} U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{array} \right.$$

13

de classe $\mathcal{C}^1$. On dit alors que (I.1) est un *sytème différentiel autonome du premier ordre en dimension 2.* Il s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \tag{I.4}$$

Définition. *Soient un ouvert U de $\mathbb{R}^2$,*

$$\boldsymbol{v} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x, y), g(x, y)) \end{array}$$

*On appelle **courbe intégrale** du champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$, tout arc paramétré (à difféomorphisme près) $\gamma = (\Omega, \varphi = (x, y))$ où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ est solution du système différentiel autonome*

14

du premier ordre (I.4) associé à $\boldsymbol{v}$: c'est à dire

$$\begin{cases} \forall t \in I : (x(t), y(t)) \in U \\ x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

- Le problème de Cauchy (I.2), associé à la condition initiale $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$, s'écrit

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{(I.5)}$$

Proposition I.5. *Si $\varphi : I \longmapsto U$ est une solution maximale de (I.4) alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{l} a + I \longrightarrow U \\ t \longmapsto \varphi(t - a) \end{array} \right.$$

15

est aussi une solution maximale.

- Les deux chemins φ et φ_a ont même image dans U, c'est à dire qu'il définissent la même courbe intégrale.

Exemples

1. Un cas linéaire : $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x - 1 \end{cases}$

En introduisant $z = x + y$, on a

$$z' = z + t - 1$$

dont les solutions sont les fonctions

$$z : t \longmapsto \lambda e^t - t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

16

En injectant dans la première équation, celle-ci devient

$$x' = \lambda e^t - t - x + t = \lambda e^t - x$$

donc les fonctions x sont

$$x : t \longmapsto \mu e^{-t} + \frac{\lambda}{2} e^t, \ \mu \in \mathbb{R}$$

et par conséquent les fonctions y sont

$$y : t \longmapsto -t - \mu e^{-t} + \frac{\lambda}{2} e^t,$$

en conclusion les solutions du système sont les fonctions

17

(x, y) telles que

$$\begin{cases} x : t \longmapsto \mu e^{-t} + \lambda e^t \\ \\ y : t \longmapsto -t - \mu e^{-t} + \lambda e^t \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Un cas non linéaire : $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 + y^2 \end{cases}$

En introduisant

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u - v) \\ y = \frac{1}{2}(u + v) \end{cases}$$

18

le système en (u, v), s'écrit

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ v' = v^2 \end{cases}.$$

Il suffit alors de résoudre l'équation différentielle scalaire $f' = f^2$, qui est à variables séparées dont les solutions sons les fonctions

$$t \longmapsto \frac{1}{\lambda - t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

19

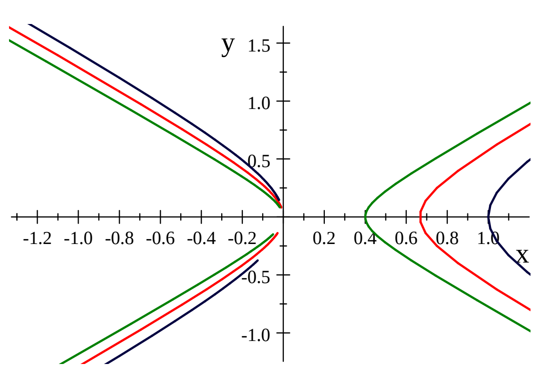
Enfin les solutions du système sont

$$\begin{cases} x : t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\mu - t}\right) \\ \\ y : t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda - t} + \frac{1}{\mu - t}\right) \end{cases}, \quad (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

- Quelques courbes intégrales sont représentées ci-dessous :

Théorème I.5 (de Cauchy local). *On suppose Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour tout $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times U$ il existe une solution φ de (I.5) définie sur un intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ($\alpha > 0$). En plus si ψ est une autre solution définie sur un intervalle J, alors il existe*

20



21

$\beta > 0$ tel que

$$\forall t \in J \cap [t_0 - \beta, t_0 + \beta] : \varphi(t) = \psi(t).$$

Théorème I.6 (Cauchy global). *On suppose Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour tout $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times U$, le problème (I.5) admet une unique solution maximale $y_{\max} :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$. Et toute autre solution est la restriction de $y_{\max}$ à un sous-intervalle de $]\alpha, \beta[$.*

- Le théorème précise que la solution maximale est définie sur un **intervalle ouvert** et qu'elle ne peut pas être prolongée (dans le cas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) en α, β.

Proposition I.6. *Les images des courbes intégrales maximales (ou orbites) de v forment une partition de U.*

22

- L'équation différentielle $y' = f(x, y)$, peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = f(x, y) \end{array}\right.$$

qui est un système autonome associé au champ de vecteurs $\boldsymbol{v} = (1, f)$ sur U.

II Équations différentielles linéaires

- Dans cette partie $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $U = I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\Psi : \left| \begin{array}{l} I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ (t, X) \longmapsto A(t)X + B(t) \end{array}\right.$$

23

$A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont des applications continues. On muni $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de l'une de ces normes (de préférence sous

II.1 Sytèmes différentiels linéaires du premier ordre

- L'équation (I.1) :

$$X' = AX + B \tag{II.1}$$

24

est alors un *système d'équations différentielles linéaires du premier ordre* :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right. \tag{II.2}$$

les a_{ij} et les b_i sont des fonctions continues à valeur complexe.

- Le Système différentiel

$$X' = AX \tag{II.3}$$

est appelé système homogène associé.

25

- Une Solution du système (II.1) est une fonction φ définie dérivable sur I, à valeur dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall t \in I : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)$$

on dit alors que c'est une **solution globale** (sur I).

Théorème II.1 (Cauchy linéaire). *Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right. \tag{II.4}$$

admet une solution unique définie sur I.

26

Preuve: La relation inégrale (proposition I.2) s'écrit

$$\forall t \in I : \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t B(s)\,\mathrm{d}s \tag{II.5}$$

On définit la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $t \in I$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_0(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t B(s)\,\mathrm{d}s \\ \forall n \in \mathbb{N} : \varphi_{n+1}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t A(s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s \end{array}\right.$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sur tout segment $[a, b] \subset I$ contenant t_0, on a

$$\forall t \in [a, b] : \|\varphi_{n+1}(t)\| \leq |t - t_0| \sup_{a \leq s \leq b} \|A(s)\| \sup_{a \leq s \leq b} \|\varphi_n(s)\|$$

27

et par récurrence sur n :

$$\forall t \in [a, b] : \|\varphi_n(t)\| \leq \frac{1}{n!}|t - t_0|^n \sup_{a \leq s \leq b} \|A(s)\|^n \sup_{a \leq s \leq b} \|\varphi_0(s)\|$$

on conclut donc que la série de fonction $\sum \varphi_n$ converge normalement sur tout segment inclu dans I. Sa somme φ est continue sur I, et on peut intégrer terme à terme sur tout segment $[t_0, t]$ pour avoir

$$\varphi(t_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t_0}^t A(s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

28

d'autre part

$$\varphi(t_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t_0}^t A(s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s = \varphi(t_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{n+1}(t)$$

$$= \varphi(t_0) + \varphi(t) - \varphi_0(t) = \varphi(t) - \int_{t_0}^t B(s)\,\mathrm{d}s$$

on conclut donc que φ vérifie l'équation intégrale (II.5). On peut préciser l'unicité en fournissant une majoration explicite de l'écart de deux solutions vérifiant des conditions initiales données :

Lemme. *Si φ et ψ sont les solutions de (II.2) vérifiant les condi-*

29

tions de Cauchy en (t_0, x_0) et (t_0, y_0), on a :

$$\forall t \in I : \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \exp\left|\int_{t_0}^t \|A(s)\|\,\mathrm{d}s\right|.$$

Preuve du lemme: D'après la relation intégrale, on a, pour tout $t \in I$:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| = \left\|x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t A(s)(\varphi(s) - \psi(s))\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leq \|x_0 - y_0\| + \left|\int_{t_0}^t \|A(s)\|\,\|\varphi(s) - \psi(s)\|\,\mathrm{d}s\right|$$

c'est alors un exercice facile de fonctions numériques qui est de montrer que si deux fonctions continues f et $a : I \longrightarrow$

30

$\mathbb{R}^+$, vérifient

$$\forall t \in I : f(t) \leq a_0 + \left| \int_{t_0}^{t} a(s) f(s) \, \mathrm{d}s \right|$$

pour un réel $a_0 \geq 0$, alors

$$\forall t \in I : f(t) \leq a_0 \exp \left| \int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s \right|.$$

Proposition II.1. *L'ensemble $\mathcal{S}_0(I)$ des solutions sur I du système homogène (II.3) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application :*

$$\Phi_{t_0} : \left| \begin{array}{c} \mathcal{S}_0(I) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0) \end{array} \right.$$

31

est un isomorphisme d'ev. En particulier $\dim \mathcal{S}_0(I) = n$.

Si X_0 est une solution de (II.1), alors l'ensemble $\mathcal{S}(I)$ des solutions sur I du système (II.1) est $X_0 + \mathcal{S}_0(I)$ qui est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$.

Preuve: comme dans le cas d'équation différentielle scalaire linéaire (voir cours MPSI). La bijectivité est une conséquence du théorème de Cauchy.

Système fondamental de solutions du système différentiel

Définition. *On appelle **système fondamental de solutions** de (II.1) toute base : $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de $\mathcal{S}_0(I)$.*

Proposition II.2. *Soit $t_0 \in I$. une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solu-*

32

tions de (II.1) est un système fondamental de solutions de (II.1) si et seulement si la famille $(\varphi_1(t_0), ..., \varphi_n(t_0))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Preuve: Φ_{t_0} est un isomrphisme d'espaces vectoriels, donc transforme une base de $\mathcal{S}_0(I)$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Définition. *On appelle **wronskien** d'une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (II.1), l'application*

$$W : \left| \begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \det(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \end{array} \right.$$

D'après ce qui précède on a :

Proposition II.3. *Soit une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (II.1), les propositions suivantes sont équivalentes :*

33

(i) $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (II.1).
(ii) Pour tout $t \in I : W(t) \neq 0$.
(iii) Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

- La proposition signifie qu'un wronskien d'une famille de solution de (II.1) est soit la fonction nulle oubien il ne s'annule en aucun point de I. Le théorème suivant donne plus de précision.

Théorème II.2. *Soient $t_0 \in I$ et une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (II.1). Le wronskien est donné par :*

$$\forall t \in I : W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)) \, \mathrm{d}s \right).$$

(formule de Liouville)

34

Montrons d'abord le lemme :

Lemme. *Pour tout $(v_1, ..., v_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:*

$$\sum_{j=1}^{n} \det(v_1, .., Av_j, .., v_n) = \mathrm{Tr}(A) \det(v_1, ..., v_n)$$

Preuve du lemme: C'est un bon exercice d'algèbre linéaire.

Preuve du théorème: Les fonctions $\varphi_1, ..., \varphi_n$ et W sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$:

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\left(\varphi_1(t), .., \varphi_j'(t), .., \varphi_n(t)\right)$$

35

$$= \sum_{j=1}^{n} \det(\varphi_1(t), .., A(t)\varphi_j(t), .., \varphi_n(t))$$
$$= \mathrm{Tr}(A(t)) \det(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$$

donc la fonction W est solution sur I de l'équation différentielle scalaire

$$W' = \mathrm{Tr}(A(t)) W$$

dont la seule solution qui prend la valeur $W(t_0)$ en t_0 est donnée par

$$\forall t \in I : W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s)) \, \mathrm{d}s \right).$$

36

Remarque. *Les résultat établis ci-dessus sont valables aussi bien lorsque les données sont complexes que réelles. Dans le cas d'un système différentiel réel on peut travailler dans $\mathbb{R}$ directement, oubien travailler dans $\mathbb{C}$ et ne considérer que les parties réelles des solution qui seront alors les solutions dans $\mathbb{R}$.*

Méthode de la variation des constantes

Proposition II.4. *Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (II.1). Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^n$ tel que*

$$\forall t \in I : \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \varphi_i(t).$$

37

Preuve: Le wronskien associé à $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ne s'annule pas sur I, les λ_i sont alors données par les formules de Cramer

$$\forall t \in I : \lambda_i(t) = \frac{\det(\varphi_1(t), .., \varphi(t), .., \varphi_n(t))}{\det(\varphi_1(t), .., \varphi_i(t), .., \varphi_n(t))} \qquad \text{(II.6)}$$

$\varphi(t)$ à la $i^{\text{ème}}$ position.

Théorème II.3 (Méthode de variation des constantes)**.** *Si le second membre de l'équation (II.1) est*

$$b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

38

alors une application $\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ *est une solution de (II.1) si, et seulement si,*

$$\lambda_i' = \alpha_i \text{ pour tout } i \in [1, n].$$

- La méthode de variation des constantes consiste alors à écrire un second membre b comme combinaison linéaire des φ_i (à l'aide des relations (II.6)), puis à déterminer des primitives de fonctions scalaires.

Preuve: Si $\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ alors

$$\psi' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A \varphi_i$$

39

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i + A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i + A\psi$$

donc

$$\psi' = A\psi + B \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

$$\iff \lambda_i' = \alpha_i \text{ pour tout } i \in [1, n].$$

II.2 Sytèmes différentiels linéaires autonomes du premier ordre

Il s'agit du cas

$$X' = AX + B \tag{II.7}$$

40

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une application continue.

Exponnetielle de matrices

On a déjà défini l'exponnetielle de matrice et étudier ces propriétés :

- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$

$\exp(M)$ commute avec tout polynôme en M.

41

- $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $MN = NM$:

$$\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$$

- $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P^{-1}\exp(M)P = \exp(P^{-1}MP)$$

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le calcul de $\exp(A)$, passe la réduction de la matrice A et la formule

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_r \end{pmatrix}$$

dans le cas de matrices triangulaires (par blocs), les A_i étant des blocs carrés.

42

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(\exp A) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$, avec en plus, pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$$

ce qui permet d'avoir :

$$\det[\exp(A)] = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$$

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application

$$\varphi_A : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ est pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_A^{(k)}(t) = A^k \varphi_A(t) = \varphi_A(t) A^k$$

43

ce qui permet d'énnoncer :

Théorème II.4. *Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par*

$$X : t \longmapsto \exp((t-t_0)A)X_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Dans ce cas un système fondamental de solution du système homogène est donné par les fonctions

$$\varphi_j : t \longmapsto \exp(tA)E_j; \ 1 \le j \le n$$

$(E_1, ..., E_n)$ *est la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

44

Proposition II.5. *Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ stable par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs associé à A passant par un point X_0 de F, alors l'image $\gamma(\mathbb{R})$ de γ est contenue dans F.*

Preuve: Si $\gamma(t_0) = X_0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \exp((t-t_0)A)X_0$$

et puisque F est stable par A alors F est aussi stable par $(t-t_0)A$ puis par $\exp(t-t_0)A$.

- La méthode de variation de la constante permet de chercher une solution du système (II.7) sous la forme

$$\psi(t) = \exp((tA)\lambda(t)$$

45

où $\lambda : t \longmapsto \exp(-tA)\psi(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeur dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Ce qui permet d'énnoncer :

Théorème II.5. *Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $t_0 \in I$, l'application définie de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par*

$$X : t \longmapsto \exp((t-t_0)A)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

46

Preuve: Avec les notations ci-dessus, et sous la condition $\psi(t_0) = X_0$, on a

$$\lambda'(t) = -\exp(-tA)A\psi(t) + \exp(-tA)\psi'(t)$$
$$= \exp(-tA)\left(\psi'(t) - A\psi(t)\right) = \exp(-tA)B(t)$$

donc une solution de (II.7) est donnée avec

$$\lambda(t) = \exp(-t_0A)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-sA)B(s)\,\mathrm{d}s$$

à savoir

$$\psi(t) = \exp(tA)\left(\exp(-t_0A)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(-sA)B(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

47

$$= \exp(t - t_0A)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(t - sA)B(s)\,\mathrm{d}s$$

Exemples

(1) **Cas diagonal :**

(2) **Cas général :**

48

II.3 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

Définition. *On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, une équation du type :*

$$ay'' + by' + cy = d \tag{II.8}$$

où $a \neq 0$, b, c et d sont des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs réelles ou complexes.

L'équation homogène associée est :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{II.9}$$

Une solution de (II.8) est une fonction deux fois dérivable sur I,

49

vérifiant

$$\forall x \in I : a(x)\,y''(x) + b(x)\,y'(x) + c(x)\,y(x) = d(x)$$

- Dans toute la suite On suppose que a ne s'annule pas sur I, on dit que l'équation (II.8) est ***régulière.***
- Le changement de fonction

  $$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

  permet d'écrire l'équation sous la forme

  $$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

50

- Le problème de Cauchy associé à (II.8) en $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, s'écrit alors

  $$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d \text{ sur } I, \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_1. \end{cases} \tag{II.10}$$

Les résultats sur les systèmes différentiels linéaires donnent :

Théorème II.6. *Pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (II.10) admet une unique solution.*

Proposition II.6. *L'ensemble des solutions de (II.9) est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension 2. Si Y_0 est une solution de (II.8) alors les solutions de (II.8) sont les fonctions de la forme*

$$x \longmapsto Y_0(x) + Y(x)$$

51

où Y est solution de (II.9).

- Dans ce cas tout Système fondamental de solutions contient deux solutions (h_1, h_2) non proportionnelles, le wronskien est alors donné par :.

  $$\forall t \in I,\ w(h_1, h_2)(t) = \det\begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}$$

Remarque. *Le wronskien $w(h_1, h_2)$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et deux applications proportionnelles ont un wronskien identiquement nul.*

- Soient h_1 et h_2 deux solutions de (II.9) ; ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ est identiquement nul sur I et les fonc-

52

tions h_1 et h_2 sont proportionnelles, ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ ne s'annule pas sur I.

Proposition II.7. *Soient (h_1, h_2) un système fondamental de solutions de (II.9) ; pour toute fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, il existe un unique couple (g_1, g_2) de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, tel que$\forall t \in I$,*

$$\begin{cases} f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \end{cases}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t) = 0 \end{cases}$$

53

- La méthode de variation *des* constantes consiste donc à rechercher les solutions y de (II.8) sous la forme :

  $$y(x) = y_1(x)h_1(x) + y_2(x)h_2(x)$$

  avec les conditions équivalentes :

  $$y' = h_1'y_1 + h_2'y_2 \iff 0 = h_1y_1' + h_2y_2'$$

  en dérivant

  $$y'' = h_1''y_1 + h_2''y_2 + h_1'y_1' + h_2'y_2'$$

54

Ce qui permet de montrer que les fonctions inconnues y_1 et y_2 sont donc solutions du système linéaire

$$\begin{cases} h_1(x)y_1' + h_2(x)y_2' = 0 \\ h_1'(x)y_1' + h_2'(x)y_2' = \dfrac{1}{a}d(x) \end{cases}$$

d'où l'expression des fonctions y_1' et y_2' :

$$\begin{cases} y_1'(x) = -\dfrac{1}{a}\dfrac{d(x)h_2(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)} \\ \\ y_2'(x) = \dfrac{1}{a}\dfrac{d(x)h_1(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)} \end{cases}$$

Ce qui permet de déterminer y_1 et y_2, et donc y après le calcul de deux primitives.

Réduction de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas

On suppose $a = 1$. Si h une solution de (II.9) *qui ne s'annule pas sur I* ; on effectue le changement de fonction inconnue :

$$y = \frac{x}{h(t)} \text{ de sorte que } x = h(t)y$$

en dérivant on a

$$\begin{cases} x' = h'(t)y + h(t)y' \\ x'' = h''(t)y + 2h'(t)y' + h(t)y'' \end{cases}$$

En substituant x dans (II.8), on obtient su

$$h(t)y'' + (2h'(t) + b(t)h(t))\, y' = 0$$

et x est solution de (II.8) si, et seulement si, y est solution de

$$h(t)y'' + (2h'(t) + b(t)h(t))\, y' = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en la variable y', équation que l'on sait résoudre en calculant deux primitives :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' + \left(2\dfrac{h'(t)}{h(t)} + b(t)\right) z = 0 \end{cases}$$

Remarque. *Les deux intégrations successives donnent l'existence de deux constantes pour x, ce qui montre que l'ensemble des solutions de (II.8) dépend de deux constantes.*