Dualité en dimension finie

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Matrices et applications linéaires

Matrice en tant qu'application linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application

$$\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n;\ X \longmapsto MX$$

est linéaire. On définit alors comme pour les applications linéaires $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$:

(1) $X \in \ker M \Longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^P$ et $MX = 0$.

(2) $Y \in \operatorname{Im}(M) \Longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$. En particulier $\operatorname{rang}(M) = \dim \operatorname{Im}(M)$.

①

I.1 Matrice d'une application linéaire.

Définition I.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq i\leq p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, c.à.d :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] : u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i \,.$$

②

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, c'est alors une matrice carrée.

Remarque I.1 (1) Avec ces notations, si $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$, et $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i \in F$, alors

$$Y = MX$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

③

représentent les matrices colonnes formées par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et y dans $\mathcal{B}'$.

(2) L'application $u \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(3) En plus si G est un autre $\mathbb{K}-ev$ et $\mathcal{B}''$ une base de G, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. En particulier l'application

$$u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est un isomorphisme d'algèbre.

④

(4) Ce qui permet de déduire que, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}).$$

I.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition I.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (V_1,...,V_p)$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$telle que

$$\forall j \in [\![1,p]\!] : V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

⑤

dont les colonnes sont formées par les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Exemple I.1 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$ et en général :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1,...,\lambda_n e_n) = diag(\lambda_1,...,\lambda_n).$$

Proposition I.1 Avec les notations de la définition précédente on a :

$$\operatorname{rang}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \operatorname{rang}(\mathcal{C}).$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

⑥

I.3 Matrice de passage entre deux bases

Définition I.3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2).$$

Remarque I.2 On a aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(id_E)$. Ce qui permet de déduire

Les formules de changement de bases

Si $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ celle formée

7

par ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ alors on a la formule de changement de base

$$X_1 = PX_2 \ .$$

et si F est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, si on pose $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ on a la formule

$$M_2 = P^{-1}M_1Q,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont équivalentes.

Exercice I.1 Montrer que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

8

En particulier si $E = F$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_2$ et $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ alors

$$M_2 = P^{-1}M_1P,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont semblables.

I.4 Rang d'une application linéaire

Définition I.4 Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, on pose $\operatorname{rang} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Remarque I.3 $\operatorname{rang} u$ est défini si $\dim E$ ou $\dim F$ finie et dans ce cas

$$\operatorname{rang} u \leq \min(\dim E, \dim F).$$

9

Théorème I.1 (de factorisation) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. tout supplémentaire de $\ker u$ est isomorphe $\operatorname{Im} u$. En particulier si $\dim E$ est finie, on a :

$$\dim E = \dim\ker u + \dim \operatorname{Im}(u) \qquad \text{(formule du rang)}$$

Preuve: Si H vérifie :

$$E = \ker u \oplus H,$$

on considère l'application

$$h \in H \longmapsto u(h) \in \operatorname{Im} u$$

on vérifie que c'est un isomorphisme de $\mathbb{K} - ev$.

10

Propriétés en dimension finie :

(1) Le rang d'une application linéaire est égale au rang de sa matrice dans toutes bases.
(2) u est injective si et seulement si $\operatorname{rang}(u) = \dim E$.
(3) u est surjective $\operatorname{rang}(u) = \dim F$.
(4) u est bijective $\operatorname{rang}(u) = \dim E = \dim F$.
(5) Si $\dim E = \dim F$, alors

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ injective}$$

Proposition I.2 Le rang est invariant par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$ et $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

11

Preuve: Utiliser les matrices.

I.5 Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition I.5 Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le scalaire :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \text{ noté aussi } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

12

Développement selon ligne ou colonne

Proposition I.3 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne. De même

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

- $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j), la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se

13

note $Com(A)$. On montre que

$$A^t com(A) = \det(A) I_n.$$

Remarque I.4 $\det(I_n) = 1$ et en général le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(2) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

14

et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com(A)$$

(3) Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition I.6 Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ de n vecteurs de E, le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{F}\right)\right)$$

Proposition I.4 Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que $\mathcal{C}\text{ard}\mathcal{B}' = \dim E$, on a les résultats suivants :

⑮

- $\mathcal{B}'$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.
- $\mathcal{B}'$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.
- $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

⑯

Déterminant d'un endomorphisme.

Définition I.7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors

$$\det(u) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

et on l'appelle le déterminant de u.

Proposition I.5 Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ famille d'éléments de E, on a les résultats suivants :

- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

⑰

- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$, avec $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

II Espace dual

II.1 Forme linéaire

Définition II.1 On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

⑱

Exemple de forme linéaire : Trace d'une matrice carrée.

Définition II.2 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, le nombre note $\text{Tr}(A)$, défini par la relation suivante :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition II.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes :

- $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda\,\text{Tr}(B)$.
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.

⑲

Représentation matricielle d'une famille finie de formes linéaires

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E et φ une forme linéaire non nulle sur E, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$:

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p, \text{ où } a_i = \varphi(e_i)$$

la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_1 & ... & a_p \end{pmatrix}$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

En général si $\varphi_1, ..., \varphi_n$ est une famille de formes linéaires,

⑳

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,p} \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{K}\right)$$

où $\begin{pmatrix} a_{i,1} & ... & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est la matrice de φ_i, est appelée la matrice de la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Liens avec les systèmes linéaires

L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = 0 \\ ... & ... & ... & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = 0 \end{array} \right.$$

㉑

n'est autre que l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \ker\left(\varphi_i\right)$.

Proposition II.2 Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\text{rang}\left(\varphi_1, ..., \varphi_n\right) = \text{rang}(\mathcal{S}) = \text{rang}(M).$$

En effet: toute combinaison linéaire des φ_i est en fait une combinaison linéaire des lignes de M.

II.2 Bases duales

L'ensemble $\mathcal{L}\left(E, \mathbb{K}\right)$ des formes linéaires sur E, se note E^* et s'appelle le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-e.v de même dimension que E.

㉒

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ base de E, donc

$$\forall x \in E, \exists! \, (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i.$$

Les applications

$$\varphi_j : x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \longmapsto x_j$$

pour $j \in [\![1, p]\!]$ sont des formes linéaires, appelées formes linéaires coordonnées associcées à la base $\mathcal{B}$.

Théorème II.1 (base duale) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base

de E, il existe une unique base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ de E^*, vérifiant :

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!] : \quad \varphi_i(e_j) \quad = \quad \delta_{i,j} \qquad \text{(Symbole de Kronecker)}$$

On pose $\varphi_i = e_i^*$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_p^*)$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$ dans E^*.

Preuve: Sachant que $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$, il suffit de montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ des formes linéaires coordonnées associcées à la base $\mathcal{B}$ est libre.

Remarque II.1 Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E, alors sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_p^*)$ dans E^*, est définie par la

relation suivante :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{p} x_j e_j \in E : e_i^*(x) = x_i, \forall i \in [\![1, p]\!].$$

Ce qui permet d'écrire

$$x = \sum_{i=1}^{p} e_j^*(x) e_j \ \ , \forall x \in E.$$

Autrement dit, e_i^* est la $i^{ème}$ forme linéaire coordonnée. Parfois on utilise *le crochet de dualité* $\langle \varphi, x \rangle$ aulieu de $\varphi(x)$ si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi l'application

$$E^* \times E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad (\varphi, x) \longmapsto \langle \varphi, x \rangle$$

est bilinéaire. On écrira alors

$$x = \sum_{j=1}^{p} \langle e_j^*, x \rangle \, e_j \ \ , \forall x \in E.$$

Exemple II.1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $\mathcal{B} = (u, v, w)$ donnés par

$$u = (1, -1, 0) \, ; \ v = (0, 0, 1) \, ; \ \ w = (1, 1, 1)$$

Pour déterminer la base duale, il suffit de calculer les coordonnées d'un vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base. Pour

celà, on note P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et sa matrice inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

permet d'écrire le vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{B}$:

$$X = \frac{1}{2}(x - y) \, u + \frac{1}{2}(-x - y + 2z) \, v + \frac{1}{2}(x + y) \, w$$

ce qui donne

$$u^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(x - y)$$
$$v^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(-x - y + 2z)$$
$$w^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(x + y)$$

les trois éléments de la base duale $\mathcal{B}^*$.

Théorème II.2 (base antéduale) Soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ une base de E^*, alors il existe une unique base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\varphi_i = \varepsilon_i^*$. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ s'appelle la base antéduale de $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$.

Preuve: Soient une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E et $A = (a_{i,j}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \cdots, \varphi_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

La matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ est alors caractérisée par la relation $AM = I_p$, c.à.d que $M = A^{-1}$.

La matrice A est inversible car $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ est une base de E^*.

Remarque II.2 Dans la pratique, on connait les expressions des φ_i dans une base donnée $\mathcal{C}$, il suffit d'inverser leur matrice

dans cette base pour trouver la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base antéduale cherchée :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_p^*\right)\right)^{-1}.$$

Exercice II.1 Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi_1(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3, \ \varphi_2(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \text{ et } \varphi_3(x) = x_1 + x_2.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et donner sa base antéduale.

Réponse: Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ et } M^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix} -\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}, \varepsilon_3=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}\\ -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

31

les trois vecteurs colonnes de M^{-1}.

Exercice II.2 Dans $E=\mathbb{K}_2[X]$, on considère, pour $k=0,1$ et 2 :

$$\varphi_k : P\in E\longmapsto P(k).$$

Montrer que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)$ est une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

Réponse: Sa base antéduale est la base de **Lagrange** de $\mathbb{K}_2[X]$:

$$L_0=\frac{1}{2}(X-1)(X-2);\ L_1=X(2-X);\ L_2=\frac{1}{2}X(X-1).$$

32

Qu'on peut aussi trouver en calculant l'inverse de la matrice

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

de $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)$ dans la base $\left(1,X,X^2\right)$ de E. Ce qui donne avec

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

que

$$L_0=1-\frac{3}{2}X+\frac{1}{2}X^2;\ L_1=2X-X^2;\ L_2=-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}X^2.$$

33

II.3 Hyperplans et formes linéaires

Proposition II.3 Soit F un $s.e.v$ de E. Tous les supplémentaires de F sont isomorphes.

Preuve: Si $E=F\oplus G=F\oplus H$, on note p_G la projection sur G parallélement à F. L'application

$$\varphi : H\longrightarrow G;\quad x\longmapsto p_G(x)$$

est alors un isomorphisme.

En effet, pour tout $y\in G\subset E$, il existe $(t,x)\in F\times H$ tel que $y=t+x$, donc $x=y-t\in H$ et $p_G(x)=y$. D'autre part, si $x\in H$ et $p_G(x)=0$, alors $x\in F$ et par conséquent $x=0$.

Définition II.3 Soit F un s.e.v de E, sa codimension $\operatorname{codim} F$,

34

est la dimension commune à tous ses supplémentaires (si elle est finie). Si $\dim E<\infty$, alors

$$\operatorname{codim} F=\dim E-\dim F.$$

Définition II.4 On appelle hyperplan de E tout s.e.v H de E, de codimension 1. En dimension finie il est de dimension $\dim H=\dim E-1$.

Propriétés des hyperplans

(1) Si H est un hyperplan de E et $x_0\notin H$, alors $E=H\oplus\mathbb{K}x_0$.

(2) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E.

35

(3) Inversement, si H est un hyperplan de E, alors il existe φ, une forme linéaire non nulle sur E, t.q $H=\ker\varphi$. Dans ce cas si $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})\setminus\{0\}$ est la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ de E, l'équation

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$$

caractérise les éléments de H et est appelée équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$.

(4) Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E t.q $\ker\varphi=\ker\psi$, alors $\exists\lambda\neq 0$ t.q $\varphi=\lambda\psi$.

Définition II.5 On dit que les hyperplans $H_i=\ker\varphi_i$, $1\leq i\leq n$, sont indépendants si la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre dans

36

E^*, ce qui revient à dire que le système linéaire (ou la matrice) associé(e) et de rang n.

Théorème II.3 Soient $H_1,\dots,H_n$ des hyperplans de E, $\bigcap_{i=1}^{n}H_i$ est un s.e.v de E de codimension inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si les H_i sont indépendants.

Preuve: Ce n'est autre que le théorème du rang (version sysytème linéaire en MPSI) : *L'ensemble de solutions du système linéaire*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,p}x_p & =0\\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n,1}x_1 & +\cdots+ & a_{n,p}x_p & =0\end{cases}$$

37

est un s.e.v F de $\mathbb{K}^n$ t.q $\dim F=p-\operatorname{rang}(\mathcal{S})$ et $\operatorname{codim} F=\operatorname{rang}(\mathcal{S})\leq n$, avec égalité si et seulement si les équations de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes.

Equations d'un s.e.v

Théorème II.4 Soit E un $\mathbb{K}-ev$, $\dim E=p$, F un s.e.v de E, $n=\operatorname{codim} F$. Il existe n formes linéaires indépendantes $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ dans E^* t.q : $F=\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i$.

Dans ce cas le système linéaire associé aux formes linéaires,

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,p}x_p & =0\\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n,1}x_1 & +\cdots+ & a_{n,p}x_p & =0\end{cases}$$

38

dans une base $\mathcal{B}$ de E, est appelé système d'équations cartésiennes de F dans $\mathcal{B}$.

Preuve: Soit $(\varepsilon_{n+1}, ..., \varepsilon_p)$ une base de F, qu'on complète pour avoir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, ..., \varepsilon_p)$ de E.

Si $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est la base $\mathcal{B}^*$, alors F est donné par le système homogène associé aux n formes linéaires $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Proposition II.4 Soient φ, φ_1, ..., φ_n des formes linéaires sur E,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$$

39

Preuve: Le sens réciproque est évident. Notons par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ ... & ... & ... \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_p \end{pmatrix}$$

les matrices de $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ et φ respectivement. $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$, signifie que les deux systèmes linéaires

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = 0 \\ ... & ... & ... & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

40

$$\mathcal{S}' : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = 0 \\ ... & ... & ... & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = 0 \\ a_1x_1 & + \cdots + & a_px_p & \end{cases}$$

sont équivalents et que donc la dernière équation dans $(\mathcal{S}')$ est de trop, ce qui signifie que le rang des vecteurs lignes des matrices associées aux systèmes est le même. On peut donc conclure que la dérnière ligne dans $(\mathcal{S}')$ est combinaison linéaire des autres.

Et les hyperplans affines

Soit E un $\mathbb{K}-ev$, un sous espace affine $\mathcal{F}$ de E de direction un sous espace vectoriel F et passant par un point $A \in E$ est

41

l'ensemble

$$\mathcal{F} = A + F = \{A + x \mid x \in F\}.$$

la dimension (et codimension) de $\mathcal{F}$ n'est autre que celles de F.

Si le **sous espace vectoriel** F est défini par le **système homogène**

$$\mathcal{S}_0 \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = 0 \\ ... & ... & ... & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = 0 \end{cases}$$

alors le **sous espace affine** $\mathcal{F}$ est caractérisé par le **système**

42

avec second membre

$$\mathcal{S} \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = b_1 \\ ... & ... & ... & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

avec, si on pose $A = (z_1, ..., z_p)$:

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} z_j, \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

43