

Calcul différentiel

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Fonctions d'une variable réelle	1
I.1 Rappels : Continuité de fonctions vectorielle	1
I.2 Dérivabilité d'une fonction vectorielle	4
I.3 Formule de Leibniz générale	11
I.4 Inégalité des accroissements finis	15
I.5 Formule de Taylor	18
II Fonctions de plusieurs variables réelles	20
II.1 Différentiabilité et différentielle d'une applica- tion	20
II.2 Dérivées partielles	23
II.3 Matrice jacobienne	25

II.4 Applications de classe C^1	36
II.5 Dérivées successives	40
II.6 Inégalité des accroissements finis	44
III Fonctions implicites et inversion locale	45
III.1 Théorème des fonctions implicites	45
III.2 Théorème d'inversion locale	50
IV Extrema des fonctions réelles	53
IV.1 Condition nécessaire d'extremum	53
IV.2 Condition suffisante d'extremum	55
IV.3 Extrema liés	63

I Fonctions d'une variable réelle

Dans cette section E est un \mathbb{R} -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (dans la pratique E est \mathbb{R}^n ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), muni d'une norme quelconque (toutes les normes sont équivalentes). Les applications considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeur dans E .

I.1 Rappels : Continuité de fonctions vectorielle

Définition I.1 définition usuelle de la continuité en un point et sur I . Continuité dans les evn.

Proposition I.1 Soient (f_1, \dots, f_n) les composantes de f , c'est ①

à dire que dans une base donnée. Alors f est continue en a si et seulement si toutes les f_i le sont.

- il ne sert de rien de considérer coordonnées par coordonnées dans l'espace de départ :

Exemple I.1 Soit la fonction

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si non} \end{cases}$$

est continue par rapport à x et y mais discontinue en $(0, 0)$.

- En revanche, il est parfois difficile (voir impossible de déterminer les coordonnées de $f(t)$ dans une base donnée :

②

Exemple I.2 La fonction $t \mapsto \exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue, car

$$\begin{aligned} \|\exp(tA) - \exp((t+h)A)\| &= \|\exp(tA)\| \|I_n - \exp(hA)\| \\ &= \|\exp(tA)\| \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \|\exp(tA)\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} \\ &\leq \|\exp(tA)\| (\exp(|h| \|A\|) - 1) \end{aligned}$$

la dernière expression tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$.

③

- Néanmoins, on a tous les théorèmes usuels sur la continuité dans les evn :

Proposition I.2 Tout « cocktail » d'applications continues est continu.

- Ce qui permet d'assurer la continuité de toute combinaison de fonctions usuelles là où elle est définie.

I.2 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

Définition I.2 On dit que f est dérivable en $a \in I$, si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$$

④

existe dans E . Cette limite (unique) est notée $f'(a)$. Ce qui équivaut à

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Si f est dérivable en tout point de I , on dit que f est dérivable sur I . L'application

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

est alors appelée la dérivée de f sur I .

Remarque I.1 On définit, comme dans le cas de fonction réelle, la notion de dérivabilité à gauche et à droite. Ainsi que la no-

⑤

<p>tions de dérivées successives et de fonctions de classe C^k sur I, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Il est clair aussi que :</p> <p>Proposition I.3 Tout application dérivable est continue.</p> <p>Proposition I.4 $C^k(I; E)$ est un \mathbb{R}-ev, et l'application $f \mapsto f^{(k)}$ est linéaire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, i.e.</p> <p>$(f+g)' = f'+g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$ pour tout f, g dérivable et $\lambda \in \mathbb{R}$.</p> <p>Proposition I.5 Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ dans une base de E, alors f est dérivable en a si et seulement les fonctions (scalaires) f_i ($1 \leq i \leq p$) le sont. Et dans ce cas $f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_p(a))$.</p> <p style="text-align: right;">⑥</p>	<p>Remarque I.2 Donc si on connaît les composantes dans une base de f, la dériver revient à dériver ses composantes. Mais il existe des cas où les composantes ne sont pas facilement calculables.</p> <p>Exemples</p> <p>(1) $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, f est dérivable si et si et seulement si x_1, \dots, x_p le sont et</p> $f'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_p(t)).$ <p>(2) $f(t) = (a_{i,j}(t)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, f est dérivable si et ssi les $a_{i,j}$ le sont et $f'(t) = (a'_{i,j}(t))$.</p> <p style="text-align: right;">⑦</p>
<p>(3) Toute application constante dérivable sur \mathbb{R} de dérivée nulle.</p> <p>(4) Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée constante.</p> <p>Proposition I.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</p> $t \mapsto \exp(tA)$ <p>est C^∞ sur \mathbb{R}, sa dérivée est l'application :</p> $t \mapsto \exp(tA)A = A \exp(tA)$ <p style="text-align: right;">⑧</p>	<p>Preuve: pour tout $t, h \in \mathbb{R}$:</p> $\begin{aligned} \exp((t+h)A) - \exp(tA) &= hA \exp(tA) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{(k+1)!} \\ &= hA \exp(tA) \left(I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{(k+1)!} \right) \\ &= hA \exp(tA) + hA \exp(tA) \varepsilon(h) \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">⑨</p>
<p>avec $\varepsilon(h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{(k+1)!} = hA \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{(k+2)!}$, vérifie</p> $\begin{aligned} \ \varepsilon(h)\ &\leq h \ A\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ h ^k \ A\ ^k}{(k+2)!} \\ &\leq h \ A\ \exp(h \ A\) \end{aligned}$ <p>Composition d'applications dérivable</p> <p>(1) Composition par une application linéaire : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable et $u : E \rightarrow F$ linéaire (E et F Banach). Alors $u \circ f : \mathbb{R} \rightarrow F$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.</p> <p style="text-align: right;">⑩</p>	<p>(2) Composition quelconque : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivables. Alors $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow E$ est dérivable et $(g \circ f)' = f'(g \circ f)$.</p> <p>I.3 Formule de Leibniz générale</p> <ul style="list-style-type: none"> La formule de Leibniz se généralise au cas de fonctions vectorielles. Si E est une algèbre de Banach, donc muni d'un produit, alors le produit de deux applications dérivables est dérivable et on a la formule $(fg)' = f'g + fg'$ <p style="text-align: right;">⑪</p>
<p>et en général</p> $\left(\prod_{i=1}^n f_i \right)' = \sum_{i=1}^n f_1 \times \dots \times f'_i \times \dots \times f_n$ <p>et en particulier $(f^n)' = n f' f^{n-1}$ si l'algèbre est commutative. Et en général :</p> <p>Théorème I.1 Si $f, g : I \rightarrow E$ sont deux fonctions de classe C^n, (I intervalle de \mathbb{R} et E une \mathbb{R}-algèbre de Banach), alors le produit fg est aussi de classe C^n et on a :</p> $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ <p style="text-align: right;">⑫</p>	<p>formule toujours valables si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow E$.</p> <p>Remarque I.3 (Importante) En fait la formule de Leibniz se généralise à tout produit (multilinéaire) :</p> <p>(1) Si $B : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire (E, F et G Banach). Si $f : I \rightarrow E, g : I \rightarrow F$ sont deux fonctions dérivables, alors le produit $B(f, g) : I \rightarrow G$ est aussi dérivable et on a :</p> $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$ <p>en particulier si B est une forme bilinéaire sur E, l'application $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}, par Exemple :</p> <p>(i) $t \mapsto \lambda(t)f(t), \lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$.</p> <p style="text-align: right;">⑬</p>

<p>(ii) $t \mapsto f(t).g(t)$ produit scalaire dans \mathbb{R}^p. En particulier si $\ f\ _2^2 = cste$ alors $(\ f\ _2^2)' = (f.f)' = 2f'.f = 0$ c.à.d $f' \perp f$.</p> <p>(iii) $t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ produit vectoriel dans \mathbb{R}^3.</p> <p>(2) En général, pour une application multilinéaire comme l'application \det dans une base B de E qui est une forme p-linéaire sur E ($\dim E = p$). Si f_1, f_2, \dots, f_p sont des applications dérivables sur I à valeur dans E alors l'application $\varphi : t \mapsto \det_B(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable et on a</p> $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^p \det_B(f_1(t), \dots, f'_k(t), \dots, f_p(t)). \tag{14}$	<p>I.4 Inégalité des accroissements finis</p> <p>Dérivées et intégrales</p> <p>On définit l'intégrale d'une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ en prenant une base et en intégrant les composantes.</p> <p>Théorème I.2 Si f est C^1 sur I alors pour tous $a, b \in I$ on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.</p> <p>Théorème I.3 (Inégalité des accroissements finis) Soient $f : [a, b] \rightarrow E, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que</p> $\forall t \in]a, b[: \ f'(t)\ \leq g'(t). \tag{15}$
<p>Alors</p> $\ f(b) - f(a)\ \leq g(b) - g(a)$ <p>Théorème I.4 Soit $f : [a, b] \rightarrow E$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que</p> $\forall t \in]a, b[: \ f'(t)\ \leq M$ <p>alors</p> $\ f(b) - f(a)\ \leq M(b - a).$ <p>Théorème I.5 Soit $f : I \rightarrow E$, continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors</p> <p>f est k-lipschitzienne si et seulement si $\forall t \in \overset{\circ}{I} : \ f'(t)\ \leq k$. $\tag{16}$</p>	<p>Proposition I.7 Soit f une application dérivable sur l'intérieur de I, continue sur I. Alors</p> <p>f est constante sur $I \iff f'$ est identiquement nulle.</p> <p>Théorème de prolongement d'une application dérivable</p> <p>Théorème I.6 Soit E un espace vectoriel normé complet et $f :]a, b[\rightarrow E$ dérivable, telle que la fonction f' admet une limite ℓ au point a. Alors f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow E$. L'application \tilde{f} est dérivable sur $]a, b[$ et $\tilde{f}'(a) = \ell$.</p> <p>Théorème I.7 Soit $f : I \rightarrow E, a \in I$. Si f est continue sur I, $\tag{17}$</p>
<p>dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et f' admet une limite ℓ au point a. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.</p> <p>I.5 Formule de Taylor</p> <p>Théorème I.8 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe C^n; on suppose que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et que</p> $\ f^{(n+1)}(t)\ \leq M$ <p>alors</p> $\left\ f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\ \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{18}$	<p>Théorème I.9 (Formule de Taylor Young) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, a \in I$ et $f : I \rightarrow E, n$ fois dérivable au point a. Alors, au voisinage de a,</p> $f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((t-a)^n)$ <p>Théorème I.10 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f : I \rightarrow E$, de classe C^{n+1}. Alors, $\forall a, b \in I$:</p> $f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \tag{19}$
<p>II Fonctions de plusieurs variables réelles</p> <p>Les fonctions considérées dans la suite sont définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n.</p> <p>II.1 Différentiabilité et différentielle d'une application</p> <ul style="list-style-type: none"> • Différentiabilité d'une application f d'un ouvert U de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n en un point a de U, • différentielle $df(a)$ (ou $df_a, Df(a), f'(a)$) de f en a; Unité de la différentielle. • Exemples: <ol style="list-style-type: none"> (1) $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, 3xy)$ est différentiable au point $\tag{20}$ 	<p>$(0, 0)$.</p> <p>(2) $M \mapsto \exp(M)$ en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.</p> <p>Proposition II.1 Toute application linéaire est différentiable, et égale à sa différentielle en tout point.</p> <p>Proposition II.2 Différentielle d'application bilinéaire :</p> $dB_{(a,b)}(h, k) = B(a, k) + B(h, b).$ <ul style="list-style-type: none"> • Tous les produit usuels sont différentiables. <p>Proposition II.3 Toute application différentiable est continue. $\tag{21}$</p>

<p>Opérations sur les différentielles</p> <ul style="list-style-type: none"> • Combinaisons linéaires : $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$ • Composée : $d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$. En particulier si f est linéaire $d(f \circ g)_a = f \circ dg_a$ • Conséquences:Produit et inverse. <p>Proposition II.4 $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n, f = (f_1, \dots, f_n)$ différentiable si et seulement si toutes les f_i le sont et</p> $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$ <p>et en général $f : E \longrightarrow F \times G = (f_1, f_2)$ différentiable si et seulement si toutes les f_i le sont et $f' = (f'_1, f'_2)$.</p> <p style="text-align: right;">(22)</p>	<p>II.2 Dérivées partielles</p> <ul style="list-style-type: none"> • dérivée $D_v f(a)$ de f en a suivant un vecteur non nul $v \in E$, • Exemple: <p>(1) $(x, y) \longmapsto \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$. Admet des dérivées dans toutes les directions.</p> <p>(2) $M \longmapsto \exp(M)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sa dérivée suivant I_n est $\exp(M)$.</p> <p>Proposition II.5 Opérations sur les dérivées directionnelles : somme, C.L, produit (tous les produits).</p> <p style="text-align: right;">(23)</p>
<p>Théorème II.1 Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, alors f admet des dérivées dans tous les sens et</p> $\partial_v f(a) = df_a(v) \text{ pour tout } v \in E.$ <p>Définition II.1 Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$:</p> $\partial_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$ <p>où $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la base canonique de \mathbb{R}^p est appelée dérivée partielle de f d'indice i en a, on la note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, si (x_1, \dots, x_p) désigne un point générique de \mathbb{R}^p.</p> <p style="text-align: right;">(24)</p>	<p>II.3 Matrice jacobienne</p> <p>Définition II.2 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en a. La matrice jacobienne de f en a est la matrice de la différentielle df_a dans les bases canoniques de \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n :</p> $J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$ $= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ <p>où $f = (f_1, \dots, f_n)$.</p> <p style="text-align: right;">(25)</p>
<p>Dans le cas $p = n$, la matrice $J_f(a)$ est carrée, son déterminant est le jacobien de f en a.</p> <p>Remarque II.1 • Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, à variable réelle alors</p> $J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix} \text{ matrice colonne}$ <p>qu'on confond avec le vecteur de \mathbb{R}^n de associé.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, est numérique alors $J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \text{ matrice ligne}$ <p style="text-align: right;">(26)</p>	<p>qu'on confond avec la forme linéaire associée. Dans ce cas le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$ est appelé le gradient de f en a noté $\text{grad } f(a)$ ou $\overrightarrow{\nabla f(a)}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Les opérations sur les dérivées permettent d'avoir $J_{\lambda f + \mu g}(a) = \lambda J_f + \mu J_g \text{ et } \nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ et } f, g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <p>et aussi le gradient et la jacobienne de tous les "pro-</p> <p style="text-align: right;">(27)</p>
<p>duits", par exemple :</p> $J_{\lambda f}(a) = f(a)J_\lambda(a) + \lambda(a)J_f(a)$ <p>où $\lambda : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$</p> <p>Proposition II.6 Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, alors</p> $\forall h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p : df_a(h) = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_p \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">(28)</p>	<p>en particulier Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$:</p> $df_a(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \overrightarrow{\nabla f(a)} \cdot h \text{ produit scalaire.}$ <ul style="list-style-type: none"> • Exemples : <p>(1) Si f est linéaire alors $J_f(a) = \text{Mat}(f)$ dans les bases canoniques.</p> <p>(2) $f : (x, y) \longmapsto (x^2 + y^2, 3xy)$</p> $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3y & 3x \end{pmatrix} \det J_f(x, y) = 6(x^2 - y^2)$ <p style="text-align: right;">(29)</p>

<p>(3) $f : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$</p> $J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad \det J_f(r, \theta) = r$ <p>(4) Voir aussi les coordonnées sphériques et cylindriques.</p> <p>Composition d'applications différentiables</p> <p>Théorème II.2 Soient U ouvert de \mathbb{R}^p, V ouvert de \mathbb{R}^q, $f : U \rightarrow V$, et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $b = f(a)$ alors</p> $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a) \text{ produit matriciel.}$ <p style="text-align: right;">(30)</p>	<p>En particulier si $p = q = n$ et $f : U \rightarrow V$ bijective avec f et f^{-1} différentiable, alors</p> $J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}.$ <p>Composée des dérivées partielles</p> <p>Avec les notations ci-dessus, on a :</p> <p style="text-align: right;">(31)</p>
<p>(1) Dans le cas général :</p> $\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq n}$ $= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_n}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$ <p>c'est la $j^{\text{ième}}$ colonne de $J_{g \circ f}(a)$.</p> <p>(2) Dans les cas particuliers :</p> <p style="text-align: right;">(32)</p>	<ul style="list-style-type: none"> $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q = (f_1, \dots, f_q)$ et $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ alors $(g \circ f)'(a) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) f'_k(a) = \overrightarrow{\nabla g(f(a))} \cdot f'(a) \text{ produit scalaire}$ <ul style="list-style-type: none"> $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q = (f_1, \dots, f_q)$ et $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, alors $g \circ f = (g_1 \circ f, \dots, g_n \circ f)$ et $(g_j \circ f)'(a) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a)) f'_k(a)$ <p style="text-align: right;">(33)</p>
<ul style="list-style-type: none"> $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q = (f_1, \dots, f_q)$ et $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) = \overrightarrow{\nabla g(f(a))} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \text{ produit scalaire}$ <p>et donc</p> $\overrightarrow{\nabla g \circ f}(a) = \overrightarrow{\nabla g(f(a))} J_f(a)$ <p>Un cas particulier:</p> $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $(u, v) \mapsto (x, y) \mapsto g(x, y) = g \circ f(u, v)$ <p style="text-align: right;">(34)</p>	<p>on a alors</p> $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \overrightarrow{\nabla g(x, y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \text{ produit scalaire}$ <ul style="list-style-type: none"> $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\frac{\partial g \circ f}{\partial x_j}(a) = g'(f(a)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ <p>Exemples :</p> <p>(1) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par</p> $f(x, y) = \frac{g(xy)}{1 + y^2}. \text{ Dérivées partielles à l'ordre 1 de}$ <p style="text-align: right;">(35)</p>
<p>f en fonction de g et g'.</p> <p>(2) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par</p> $f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt. \text{ Dérivées partielles à l'ordre 1 de } f \text{ en fonction de } \varphi.$ <p>II.4 Applications de classe C^1</p> <p>Définition II.3 On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U si elle est différentiable sur U et toutes ses dérivées partielles sont continues sur U.</p> <ul style="list-style-type: none"> Exemples : <p>(1) Toutes les fonctions polynômiales sont de classe C^1.</p> <p style="text-align: right;">(36)</p>	<p>(2) La fonction $A \mapsto A^{-1}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.</p> <p>Proposition II.7 L'ensemble $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ des applications de C^1 sur U est un $\mathbb{R} - \text{ev}$.</p> <p>En plus toute composée et tout "produit" de fonctions de classe C^1 est de classe C^1.</p> <p>Théorème II.3 (Caractérisation) $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et toutes ses dérivées partielles sont continues. Dans ce cas l'application</p> $U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ $x \mapsto df_x$ <p style="text-align: right;">(37)</p>

est continue et réciproquement.

Preuve (non exigible) : Il suffit de traiter le cas $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles existent et sont continues, on pose, pour $a \in U$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_p)$,

$$L(h_1, \dots, h_p) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

et on montre que $f(a+h) - f(a) - L(h_1, \dots, h_p) = o(h)$. Pour simplifier les notations on traite le cas $p = 2$. On pose $a =$

(38)

(a_1, a_2) , on a donc

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 \\ &= \left(f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 \right) \\ &+ \left(f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

(39)

II.5 Dérivées successives

- Si les dérivées partielles de $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont différentiables, on définit les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \text{ et si } i = j, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

et si les dérivées secondes sont différentiables, les dérivées partielles d'ordre 3 et ainsi de suites, avec la récurrence

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right) \text{ pour } (i_1, \dots, i_k) \in [1, p]^k$$

(40)

- On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur U si, $\forall (i_1, \dots, i_k) \in [1, p]^k$, l'application

$$x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$$

est définie et continue sur U .

- On note $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R}^n)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, l'espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^k sur U .
- Tous les opérateurs de dérivation sont linéaires.

(41)

Théorème de Schwarz

Théorème II.4 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$\forall (i, j) \in [1, p]^2, \forall x \in U : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

en général si f est de classe \mathcal{C}^k . Alors $\forall (i_1, \dots, i_k) \in [1, p]^k$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_k, \forall x \in U :$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \dots \partial x_{\sigma(i_k)}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$$

Preuve: admise.

(42)

Remarque II.2 Dans le cas de fonctions de classe \mathcal{C}^k on note, par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ et en général

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \dots \partial x_{i_s}^{k_s}} \text{ si on dérive } k_j \text{ fois par rapport à } i_j.$$

- **Exemples pratiques :** dériver tout ce qui vous tombe sous la main...

(43)

II.6 Inégalité des accroissements finis

Théorème II.5 Soit E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert convexe de E et $f : U \rightarrow F$ différentiable telle que

$$\forall x \in U : \|df(x)\| \leq M, M \text{ un réel positif}$$

Alors pour tout $a, b \in U :$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|.$$

Preuve: Utilise le cas d'une variable réelle avec $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$.

Proposition II.8 Soit E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert convexe de E et $f : U \rightarrow F$ différentiable. Alors f est constante sur U si et seulement si df est nulle sur U .

(44)

Remarque II.3 En fait il suffit que U soit un ouvert connexe par arcs.

III Fonctions implicites et inversion locale

III.1 Théorème des fonctions implicites

Théorème III.1 (Cas général) Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : W \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^1 . On pose $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_p)$ et $f = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $(a, b) \in W$ tel que $f(a, b) = 0$

(45)

<p>et</p> $Q = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$ <p>est inversible.</p> <p>Alors, il existe des voisinages ouverts U de a et V de b, tels que</p> $\forall x \in U, \exists ! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = 0.$ <p>Si l'on pose $y = \varphi(x)$, φ est continue sur U et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage U_0 de a. En plus si f est de classe \mathcal{C}^k alors φ est aussi de classe \mathcal{C}^k.</p> <p>Théorème III.2 (Cas pratiques important) Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1, $(x_1, \dots, x_n, y) \mapsto f(x_1, \dots, x_n, y)$. Soit $(a_1, \dots, a_n, b) \in W$ tel que $f(a_1, \dots, a_n, b) = 0$</p> <p style="text-align: right;">(46)</p>	<p>0 et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$. Alors, il existe des voisinages ouverts U de (a_1, \dots, a_n) et V de b, tels que</p> $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U, \exists ! y \in V \text{ tel que } f(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$ <p>Si l'on pose $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, φ est continue sur U et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage U_0 de a. En plus si f est de classe \mathcal{C}^k alors φ est aussi de classe \mathcal{C}^k.</p> <p>Cas $n = 1$ Soit W un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1. Soit $\Gamma = \{(x, y) \in W \mid f(x, y) = 0\}$. Pour tout $(a, b) \in \Gamma$ tel que</p> $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0,$ <p>il existe deux intervalles ouverts I et J tels que $a \in I$,</p> <p style="text-align: right;">(47)</p>
<p>$b \in J$ et une application de classe \mathcal{C}^1, $\varphi : I \rightarrow J$, telle que Γ soit son graphe. Dans ce cas $\varphi(a) = b$ et</p> $\varphi'(a) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}$ <p>Cas $n = 2$ Soit W un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\}$. Pour tout $(a, b, c) \in \Sigma$ tel que</p> $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$ <p>il existe deux ouverts U et J tels que $(a, b) \in U$, $c \in J$ et une application de classe \mathcal{C}^1, $\varphi : U \rightarrow J$, telle que Σ soit</p> <p style="text-align: right;">(48)</p>	<p>son graphe. Dans ce cas $\varphi(a, b) = c$ et</p> $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)}$ <p>Preuve: Admise.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cas où $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ et cas général $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \neq (0, 0)$. • Equation de la tangente : droite tangente et plan tangent. • Exemples pratiques : <ol style="list-style-type: none"> (1) Détermination de $\varphi, \Gamma : x^2 + y^2 - 1 = 0$ en $(0, 0)$. <p style="text-align: right;">(49)</p>
<p>(2) Calcul des dérivées de φ, tangente d'un cercle, conique en générale.</p> <p>(3) Calcul de développements limités de φ, donnée par $xe^y + ye^x = 0$ en $(0, 0)$.</p> <p>III.2 Théorème d'inversion locale</p> <p>Définition III.1 Soit E et F deux \mathbb{R}-espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On dit que $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 si</p> <ol style="list-style-type: none"> f est bijective de U sur V. f et f^{-1} sont de classe \mathcal{C}^1. <p style="text-align: right;">(50)</p>	<p>Dans ce cas</p> $\forall y \in V, d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}$ <ul style="list-style-type: none"> • En plus si f est à la fois de classe \mathcal{C}^k et un \mathcal{C}^1 difféomorphisme, alors f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^k. On dit alors que f est un \mathcal{C}^k-difféomorphisme. • Si E et F sont de dimensions finies, l'existence d'un \mathcal{C}^1 difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de F nécessite que $\dim E = \dim F$ • On peut calculer les dérivées partielles de f^{-1} à l'aide des matrices jacobiniennes grâce à la formule : $J_{f^{-1}}(y) = (J_f(f^{-1}(y)))^{-1}$ <p style="text-align: right;">(51)</p>
<p>Théorème III.3 (inversion locale) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1. Soit $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n (autrement dit la matrice $J_f(a)$ est inversible). Alors il existe un ouvert U_0 contenant a et un ouvert V_0 contenant $f(a)$ tel que f induise un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de U_0 sur V_0.</p> <p>Théorème III.4 (inversion globale) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1. On suppose que</p> <ol style="list-style-type: none"> f est injective $\forall x \in U, J_f(x)$ est une matrice inversible. <p>Alors $f(U) = V$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U sur V.</p> <p style="text-align: right;">(52)</p>	<p>IV Extrema des fonctions réelles</p> <p>Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de \mathbb{R}^p à valeur dans \mathbb{R}.</p> <p>IV.1 Condition nécessaire d'extremum</p> <p>Théorème IV.1 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1. Soit $a \in U$. Si f admet en a un extremum local, alors</p> $\forall i \in [1, p] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$ <p>Preuve: Si on pose, pour tout $i \in [1, p]$:</p> $f_i(t) = f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_p)$ <p style="text-align: right;">(53)</p>

alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_i(0)$$

et si f admet en a un extremum local, alors f_i admet en 0 un extremum local, donc $f'_i(0) = 0$.

Exercice IV.1 Etudier les extremas s'ils existent des fonctions

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 \text{ et } (x, y) \mapsto x^3 + y^3$$

en $(0, 0)$.

Définition IV.1 Un point a , en lequel la condition $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in [1, p]$ est vérifiée, est appelé **point critique** ou **stationnaire**.

(54)

IV.2 Condition suffisante d'extremum

Théorème IV.2 (Formule de Taylor-Young) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \\ &+ o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

(55)

Preuve: Avec $\varphi(t) = f(a + th)$,

$$\varphi'(t) = df_{(a+th)}(h) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^p h_i d \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{(a+th)}(h) \\ &= \sum_{i=1}^p h_i \sum_{j=1}^p h_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)(a + th) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)(a + th) \end{aligned}$$

(56)

de sorte que

$$\varphi'(0) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi''(0) &= \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_i h_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)(a) \\ &= \sum_{i=1}^p h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \end{aligned}$$

(57)

On applique alors la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction réelle φ sur $[0, 1]$, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(\theta)$$

c.q.f.d

Définition IV.2 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$. On appelle différentielle seconde de f en a la fonction polynômiale de degré 2 :

$$\Phi_a : h = (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

(58)

de sorte que, grâce à la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \Phi_a(h) + o(\|h\|^2).$$

Théorème IV.3 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$ tel que

$$\forall i \in [1, p] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

alors :

(i) Si pour tout $h \neq 0$, $\Phi_a(h) > 0$, alors f admet un minimum local strict.

(59)

(ii) Si pour tout $h \neq 0$, $\Phi_a(h) < 0$, alors f admet un maximum local strict.

(iii) Si Φ_a change de signe alors f n'admet pas d'extremum en a (on dit dans ce cas que a est un point **selle** ou point **col** de a , par analogie avec une selle de cheval ou un col de montagne).

Preuve: Sous les conditions du théorème la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \Phi_a(h) + o(\|h\|^2)$$

$f(a+h) - f(a)$ est donc du signe de $\Phi_a(h)$ pour $\|h\|$ assez petit, modulo le lemme suivant :

(60)

Lemme IV.1 Avec les notations et hypothèses ci-dessus, dans le cas (i) du théorème,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall h \in \mathbb{R}^p : \Phi_a(h) \geq \alpha \|h\|^2$$

α étant alors égal à $\inf_{\|h\|=1} \|\Phi_a(h)\|$.

• **Cas particulier où $p = 2$** : soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in U$. Une condition nécessaire pour que f admette en (a, b) un extremum est que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

(61)

On pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

Les conditions du théorème s'écrivent :

- (i) $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet en a un minimum local strict.
- (ii) $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet en a un maximum local strict.
- (iii) $rt - s^2 < 0$, alors f admet en a un point selle (pas d'extremum local en a).
- (iv) $rt - s^2 = 0$, alors on ne peut pas conclure.

62

IV.3 Extrema liés

- Soit n un entier ≥ 2 et U un ouvert de \mathbb{R}^n . Le problème d'extrema liés consiste, étant données des fonctions

$$f, g_1, \dots, g_p : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classes } \mathcal{C}^1, (p \leq n)$$

et en supposant l'ensemble

$$\Sigma = \bigcap_{k=1}^p \{x \in U \mid g_k(x) = 0\} \neq \emptyset,$$

à étudier les extrema locaux de f sur Σ . On dispose du théorème suivant sous la condition

$$\forall a \in \Sigma : \text{la famille } (dg_1(a), \dots, dg_p(a)) \text{ est libre}$$

63

Théorème IV.4 Avec les notations et hypothèses ci-dessus, si f présente un extremum local en $a \in \Sigma$. Alors il existe une (unique) famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que

$$df(a) = \sum_{k=1}^p \lambda_k dg_k(a)$$

les λ_k sont alors appelés multiplicateurs de Lagrange.

Preuve: La famille $(\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_p(a))$ étant libre. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on considère

$$\Omega = \left\{ (\lambda, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid a + \lambda u + \sum_{k=1}^p \mu_k \nabla g_k(a) \in U \right\},$$

64

qui ouvert dans \mathbb{R}^{p+1} contenant 0.

Pour tout $k \in [1, p]$, on note Φ_k l'application

$$(\lambda, \mu_1, \dots, \mu_p) \longmapsto g_k \left(a + \lambda u + \sum_{k=1}^p \mu_k \nabla g_k(a) \right),$$

puis on pose $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$, on a :

$$\Phi : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p, \Phi(0, 0) = 0 \text{ et}$$

$$\text{rang} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mu_j}(0, 0) = \nabla g_i(a) \cdot \nabla g_j(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p} = p.$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe $U =]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, tels que

65

$\varphi(0) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et

$$\forall \lambda \in U : \Phi(\lambda, \varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_p(\lambda)) = 0.$$

On considère

$$F : \lambda \longmapsto f \left(a + \lambda u + \sum_{k=1}^p \varphi_k(\lambda) \nabla g_k(a) \right)$$

qui présente un extremum local en 0 sur U , donc

$$F'(0) = \nabla f(a) \cdot \left(u + \sum_{k=1}^p \varphi'_k(0) \nabla g_k(a) \right) = 0.$$

66

D'autre part,

$$\forall i \in [1, p], \forall \lambda \in U : g_i \left(a + \lambda u + \sum_{j=1}^p \varphi_j(\lambda) \nabla g_j(a) \right) = 0,$$

donc

$$\forall i \in [1, p] : \nabla g_i(a) \cdot \left(u + \sum_{j=1}^p \varphi'_j(0) \nabla g_j(a) \right) = 0,$$

c.à.d $(\varphi'_1(0), \dots, \varphi'_p(0))$ est la solution du système linéaire

$$\left\{ \sum_{j=1}^p \nabla g_i(a) \cdot \nabla g_j(a) \varphi'_j(0) = -\nabla g_i(a) \cdot u, 1 \leq i \leq p, \right.$$

67

associé à la matrice de Gram

$$G = (\nabla g_i(a) \cdot \nabla g_j(a))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

On pose

$$\left(\nabla g_1(a) \cdot \nabla f(a) \quad \dots \quad \nabla g_p(a) \cdot \nabla f(a) \right) G^{-1} = \left(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_p \right)$$

la famille $(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_p)$ répond alors à la question.

Exemples

- (1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur Σ la droite d'équation $x + y = 1$.
Minimum en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

68

- (2) **Proposition :** Si A est **symétrique** $\lambda = \max_{\|X\|_2=1} {}^t X A X$ est valeur propre de A . Et donc toute matrice symétrique réelle admet au moins une valeur propre.

Preuve: On utilise $f(X) = {}^t X A X = (X \mid AX)$ sur $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g(X) = 0\}$ avec $g(X) = \|X\|_2^2 - 1 = (X \mid X) - 1$. Si $f(X_0) = \lambda$ alors

$$\nabla f(X_0) = 2AX_0 \text{ et } \nabla g(X_0) = 2X_0$$

sont colinéaire, donc X_0 est vecteur propre de A .

69