

# Algèbre bilinéaire

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

## Table des matières

<b>I Formes bilinéaires</b>	<b>1</b>
I.1 Généralités . . . . .	1
I.2 Formes quadratiques . . . . .	5
I.3 Matrice d'une forme bilinéaire . . . . .	9
I.4 Rang d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	22
I.5 Orthogonalité . . . . .	25
<b>II Réduction des formes quadratiques (dimension finie)</b>	<b>31</b>
II.1 Familles et bases orthogonales . . . . .	31
II.2 Décomposition en carrés (Algorithme de Gauss)	33
II.3 Formes quadratiques réelles . . . . .	44

## I Formes bilinéaires

Dans toute la suite  $\mathbb{K}$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I.1 Généralités

**Définition I.1** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. On appelle forme bilinéaire sur  $E \times F$  toute application,  $f : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ , vérifiant

- (i)  $\forall x \in E$ , l'application :  $f_x : F \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto f(x, y)$  est linéaire,
- (ii)  $\forall y \in F$ , l'application :  $f_y : E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto f(x, y)$  est linéaire.

Autrement dit,  $\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :

$$f(x + \lambda x', y + \mu y') = f(x, y) + \mu f(x, y') + \lambda f(x', y) + \lambda \mu f(x', y') \quad \textcircled{1}$$

### Exemples

(1) Les applications

- $E \times F \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto 0$ ,
- $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$ ,
- $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto xy$ ,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, (M, N) \mapsto \text{Tr}(MN)$ ,
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, (M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t MN)$ , sont bilinéaires.

(2) L'application :

$$E^* \times E \rightarrow \mathbb{K}, (\varphi, x) \mapsto \varphi(x),$$

qu'on notera aussi

$$\langle \varphi, x \rangle \text{ appelé crochet de dualité entre } E^* \text{ et } E. \quad \textcircled{2}$$

est bilinéaire.

(3) Si  $\varphi \in E^*, \psi \in F^*$ , l'application :

$$E \times F \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \varphi(x) \psi(y)$$

est bilinéaire.

**Proposition I.1** L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$  des formes bilinéaires sur  $E \times F$  est un  $\mathbb{K}$ -ev pour les opérations usuelles. C'est un sev de l'espace vectoriel des applications de  $E \times F$  dans  $\mathbb{K}$ .

- Par définition si  $f \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ , les applications

$$\Phi_f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & F^* \\ x & \longmapsto & f_x : y \mapsto f(x, y) \end{matrix} \text{ et} \quad \textcircled{3}$$

$$\Psi_f : \begin{matrix} F & \longrightarrow & E^* \\ y & \longmapsto & f_y : x \mapsto f(x, y) \end{matrix}$$

sont bien définies. En fait, on a :

**Théorème I.1**  $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(F; E^*)$  et l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(F; E^*); f \mapsto \Psi_f$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -ev. En particulier, en dimensions finies,

$$\dim \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) = \dim E \times \dim F.$$

**Preuve:** la linéarité de  $\Psi$  est évidente. Si pour  $f \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ ,  $\Psi_f = 0$ , alors  $\forall y \in F : f_y = 0$ , ce qui signifie

$$\forall y \in F, \forall x \in E : f(x, y) = 0 \quad \textcircled{4}$$

c.à.d que  $f = 0$ . D'où l'injectivité de  $\Psi$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(F; E^*)$ , on définit  $f : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ , par

$$\forall (x, y) \in E \times F : f(x, y) = \langle \varphi(y), x \rangle$$

alors  $f \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$  et  $\Psi$  est bijective.

- Si  $E = F$ , on dit simplement forme bilinéaire sur  $E$ , et on notera  $\mathcal{L}_2(E)$ , leur ensemble; c'est un  $\mathbb{K}$ -ev. Si  $\dim E = n$  alors  $\dim \mathcal{L}_2(E) = n^2$ .

### I.2 Formes quadratiques

**Définition I.2** une forme bilinéaire  $f$  sur  $E$  est dite symétrique si

$$\forall (x, y) \in E \times E : f(x, y) = f(y, x). \quad \textcircled{5}$$

**Définition I.3** Soit  $f \in \mathcal{L}_2(E)$  symétrique. L'application  $q : E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto q(x) = f(x, x)$  est appelé forme quadratique associée à  $f$ .

**Proposition I.2** Avec les notations ci-dessus, on a :

- (i)  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- (ii)  $\forall x, y \in E : q(x + y) = q(x) + 2f(x, y) + q(y)$  identité de polarisation
- (iii)  $\forall x, y \in E : q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y))$  identité de la médiane.

- Réciproquement la propriété (ii) permet de déterminer  $f$  en fonction de  $q$  :

$$\textcircled{6}$$

<p><b>Définition I.4</b> On appelle forme quadratique sur <math>E</math> toute application <math>q : E \rightarrow \mathbb{K}</math>, vérifiant :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(i) <math>\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)</math></li> <li>(ii) L'application <math>f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))</math> est une forme bilinéaire symétrique sur <math>E</math>.</li> </ul> <p>Dans ce cas, <math>q</math> est la forme quadratique associée à <math>f</math>. On dit que <math>f</math> est la forme polaire de <math>q</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En dimension finie et si <math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math>, <math>f</math> est bilinéaire donc différentiable et pour tout <math>(h, k) \in E \times F</math> :</li> </ul> $df_{(x,y)}(h, k) = f(x, k) + f(h, y)$ <p style="text-align: right;">(7)</p>	<p>et donc <math>q</math> est différentiable sur <math>E</math> et pour tout <math>h \in E</math> :</p> $dq_x(h) = df_{(x,x)}(h, h) = 2f(x, h)$ <p>ce qui permet d'écrire</p> $\forall (x, y) \in E^2 : f(x, y) = \frac{1}{2} \langle dq(x), y \rangle \text{ crochet de dualité.}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• En particulier si <math>E = \mathbb{K}^n</math> (même si <math>\mathbb{K} = \mathbb{C}</math>, le calcul est le même), avec <math>x = (x_1, \dots, x_n)</math> et <math>y = (y_1, \dots, y_n)</math>, on a</li> </ul> $f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) y_j$ <p style="text-align: right;">(8)</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Les calculs précédents montrent aussi, que l'application</li> </ul> $dq : E \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto dq_x$ <p>est une <b>forme linéaire</b> sur <math>E</math>. En particulier, si <math>E = \mathbb{K}^n</math>, les application dérivées partielles</p> $\mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}, x \mapsto \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) \text{ pour } 1 \leq j \leq n,$ <p>sont des formes linéaires sur <math>E</math>.</p> <p><b>I.3 Matrice d'une forme bilinéaire</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si les <math>\mathbb{K}</math>-ev <math>E</math> et <math>F</math> sont de dimensions finies, <math>f \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})</math> et <math>\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)</math>, <math>\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)</math> bases res-</li> </ul> <p style="text-align: right;">(9)</p>	<p>pectives de <math>E</math> et <math>F</math>, alors</p> $\forall \left( x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^p y_j \varepsilon_j \right) \in E \times F :$ $f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_i y_j f(e_i, \varepsilon_j)$ <p>donc les <math>n \times p</math> scalaires <math>a_{ij} = f(e_i, \varepsilon_j)</math> <b>caractérisent</b> <math>f</math>.</p> <p><b>Proposition I.3</b> Avec les notations ci-dessus, <math>f : E \times F \rightarrow \mathbb{K}</math> est une forme bilinéaire si et seulement si il existe une matrice</p> <p style="text-align: right;">(10)</p>
<p><math>(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})</math> telle que</p> $\forall \left( x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^p y_j \varepsilon_j \right) \in E \times F :$ $f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} x_i y_j.$ <p>En plus <math>f</math> est symétrique si et seulement si la matrice <math>(a_{ij})</math> est symétrique.</p> <p><b>Preuve:</b> Les calculs sont déjà établis, il suffit de regrouper les morceaux.</p> <p style="text-align: right;">(11)</p>	<p><b>Définition I.5</b> Avec les notations ci-dessus, la matrice</p> $(f(e_i, \varepsilon_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ <p>est appelée la matrice de <math>f</math> relativement aux bases <math>\mathcal{B}</math> et <math>\mathcal{B}'</math>, on la notera <math>Mat(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')</math>.</p> <p>Si <math>E = F</math> et <math>\mathcal{B} = \mathcal{B}'</math>, la matrice <math>(f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}</math> est appelée matrice de <math>f</math> dans la base <math>\mathcal{B}</math>, on la notera <math>Mat(f, \mathcal{B})</math>.</p> <p>Si <math>f</math> est symétrique la matrice <math>(f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}</math> est symétrique, elle est appelée aussi la matrice de la forme quadratique <math>q</math> associée à <math>f</math>. On la notera de même <math>Mat(q, \mathcal{B})</math>.</p> <p style="text-align: right;">(12)</p>
<p><b>Proposition I.4</b> Si <math>Mat(q, \mathcal{B}) = (a_{ij})</math> symétrique, alors</p> $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E : q(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• En fonction de la forme quadratique <math>q</math>, <math>E = \mathbb{K}^n</math>, pour tout <math>(i, j) \in [1, n]</math>,</li> </ul> $f(e_i, e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial q}{\partial x_k}(e_i) \delta_{kj} = \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial x_j}(e_i)$ <p style="text-align: right;">(13)</p>	<p>la matrice de <math>q</math> dans <math>\mathcal{B}</math> peut alors s'écrire :</p> $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1}(e_1) & \dots & \frac{\partial q}{\partial x_n}(e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial x_1}(e_n) & \dots & \frac{\partial q}{\partial x_n}(e_n) \end{pmatrix}$ <p>les <math>\frac{\partial q}{\partial x_j}</math> étant des formes linéaires sur <math>E</math>, on peut donc écrire</p> $M = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$ <p style="text-align: right;">(14)</p>

<p><b>Exemples</b></p> <p>(1) <math>E = \mathbb{K}^3, q(x_1, x, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3,</math></p> $\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$ $\frac{\partial q}{\partial x_2} = 2x_1 - 4x_3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};$ $\frac{\partial q}{\partial x_3} = -4x_2 - 2x_3 : \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">(15)</p>	$\mathcal{M}(q, \text{Base Canonique}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $f(x, y) = x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2.$ <p>(2) En général si <math>E = \mathbb{K}^n,</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• si <math>q(x) = x_k^2, f(x, y) = x_ky_k.</math></li> <li>• Si <math>q(x) = x_ix_j, f(x, y) = \frac{1}{2}(x_ix_j + x_jy_i).</math></li> </ul> <p>Pratiquement, une forme quadratique étant une C.L de termes de forme <math>x_k^2</math> et/ou <math>x_ix_j,</math> donc pour calculer la partie polaire, dans le cas général, on profite de la linéarité de la correspondance entre forme quadratique et partie polaire.</p> <p style="text-align: right;">(16)</p>
<p>(3) <math>E = \mathbb{K}^n, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2, f(x, y) = \sum_{k=1}^n x_ky_k.</math></p> $\mathcal{M}(q, \text{Base Canonique}) = I_n$ <p>(4) <math>E = \mathbb{K}^n, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} x_kx_{k+1},</math></p> $\mathcal{M}(q, \text{Base Canonique}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">(17)</p>	$\text{et } f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (x_ky_{k+1} + x_{k+1}y_k).$ <p><b>Ecriture matricielle</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),</math> alors pour tout <math>x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in E, y = \sum_{j=1}^p y_j\varepsilon_j \in F,</math></li> </ul> $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^p a_{ij}y_j = (x_1 \dots x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;">(18)</p>
<p>On pose</p> $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$ <p>les matrices coordonnées de <math>x</math> et <math>y.</math></p> <p><b>Proposition I.5</b> Avec les notations ci-dessus on a</p> $\forall (x, y) \in E \times F : f(x, y) = {}^tXMY$ <p>et si <math>M</math> symétrique et <math>q</math> la forme quadratique associée à <math>f</math></p> $\forall x \in E : q(x) = {}^tXMX$ <p style="text-align: right;">(19)</p>	<p><b>Changements de bases</b></p> <p><b>Théorème I.2</b> Soit <math>E</math> une <math>\mathbb{K} - ev</math> de dimension finie. <math>\mathcal{B}</math> et <math>\mathcal{B}'</math> deux bases de <math>E, P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}</math> la matrice de passage de <math>\mathcal{B}</math> à <math>\mathcal{B}'.</math> Pour toute forme bilinéaire <math>f</math> sur <math>E,</math> on a la formule de changement de bases :</p> $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = {}^tP\mathcal{M}(f, \mathcal{B})P.$ <p><b>Preuve:</b> Soient <math>\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)</math> bases de <math>E, P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}, M = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})</math> et <math>M' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}').</math> Pour <math>x, y \in E,</math> on pose</p> $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \text{ avec } X = PX'$ <p style="text-align: right;">(20)</p>
<p>les matrices coordonnées de <math>x</math> dans <math>\mathcal{B}</math> et <math>\mathcal{B}',</math> puis celles de <math>y,</math></p> $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}, \text{ avec } Y = PY'$ <p>on a alors <math>f(x, y) = {}^tXMY = {}^tX'M'Y',</math> donc</p> ${}^tX'M'Y' = {}^tXMY = {}^t(PX')M(PY') = {}^tX'({}^tPMP)Y'$ <p>ceci étant pour <math>x</math> et <math>y</math> quelconque, donc <math>M' = {}^tPMP.</math></p> <p><b>Définition I.6</b> Deux matrices <math>M</math> et <math>M'</math> dans <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{K})</math> sont dites <b>congruentes</b> s'il existe une matrice <math>P \in GL_n(\mathbb{K})</math> telle que <math>M' = {}^tPMP.</math> Il s'agit d'une relation d'équivalence sur <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{K}).</math></p> <p style="text-align: right;">(21)</p>	<p><b>Proposition I.6</b> Deux matrices congruentes ont <b>même rang.</b></p> <p><b>En effet:</b> congruentes implique équivalentes.</p> <p><b>I.4 Rang d'une forme bilinéaire symétrique</b></p> <p><b>Définition I.7</b> On appelle rang d'une forme quadratique <math>q</math> sur <math>E</math> (ou de forme bilinéaire symétrique associée) le rang de sa matrice dans une base.</p> <p><b>Définition I.8</b> On dit qu'une forme quadratique <math>q</math> est <b>non dégénérée</b> si sa matrice est inversible (ou que son rang est maximal).</p> <p style="text-align: right;">(22)</p>

<p><b>Théorème I.3</b> Une forme quadratique <math>q</math> <b>non dégénérée</b> induit un isomorphisme canonique de <math>E</math> sur <math>E^*</math>. Et l'application</p> $E \xrightarrow{\Phi} E^*$ $x \longmapsto f_x : E \longrightarrow \mathbb{K}; y \longmapsto f(x, y)$ <p>est un isomorphisme d'espace vectoriel. <math>f</math> étant la forme polaire de <math>q</math>. En particulier, on a</p> $\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \mid \varphi = f_a.$ <p><b>Preuve:</b> La linéarité de <math>\Phi</math> est évidente. Soit <math>\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)</math> base de <math>E</math> et <math>\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)</math> sa base duale. Pour tout <math>\varphi \in E^*</math>,</p> <p style="text-align: right;">(23)</p>	<p>on a <math>\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*</math>, donc pour tout <math>j \in [1, n]</math> :</p> $\Phi(e_j) = f_{e_j} = \sum_{i=1}^n f(e_i, e_j) e_i^*$ <p>ce qui signifie que</p> $\text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = (f(e_i, e_j)) = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ <p>et comme <math>q</math> est non dégénérée, sa matrice est inversible et par conséquent <math>\Phi</math> bijective.</p> <p><b>Théorème I.4</b> Soit <math>q</math> une forme quadratique sur <math>E</math>, <math>f</math> sa forme polaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :</p> <p style="text-align: right;">(24)</p>
<p>(i) <math>q</math> est non dégénérée.                  (ii) <math>\forall x \in E : (\forall y \in E, f(x, y) = 0) \implies x = 0</math>.</p> <p><b>Preuve:</b> En effet le (ii) signifie que <math>\Phi</math> (notations du Théorème I.3) est injective entre <math>E</math> et son dual <math>E^*</math> (qui ont même dimension); c'est équivalent à (i) qui signifie que <math>\Phi</math> est bijective.</p> <p><b>I.5 Orthogonalité</b></p> <p>On considère qu'un <math>\mathbb{K}</math>-ev <math>E</math> est muni d'une forme quadratique <math>q</math> de forme polaire <math>f</math>.</p> <p><b>Définition I.9</b> On dit que deux vecteurs <math>u</math> et <math>v</math> de <math>E</math> sont <i>orthogonaux</i> si <math>f(u, v) = 0</math>.</p> <p style="text-align: right;">(25)</p>	<p>Si <math>A</math> est une partie non vide de <math>E</math>, on appelle orthogonal de <math>A</math> (par rapport à <math>q</math>) l'ensemble</p> $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A : f(x, y) = 0\}.$ <p><b>Définition I.10</b> On appelle noyau de <math>q</math> (ou <math>f</math>) noté <math>\ker(q)</math>, le sev</p> $\ker(q) = E^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E : f(x, y) = 0\}$ <p><b>Remarque I.1</b> D'après le Théorème I.4, <math>q</math> est non dégénérée si et seulement si <math>\ker(q) = \{0\}</math>.</p> <p style="text-align: right;">(26)</p>
<p><b>Propriétés élémentaires de l'orthogonalité</b></p> <p>(1) <math>\{0\}^\perp = E</math>, En général l'orthogonal d'une partie <math>A</math>, <math>A^\perp</math> est un sev de <math>E</math>.                  (2) Si <math>A \subset B</math> alors <math>A^\perp \supset B^\perp</math>. et <math>A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp</math>.                  (3) <math>(A^\perp)^\perp \supset A</math>, même si <math>A</math> est un sev de <math>E</math>, on ne peut affirmer l'égalité, (voir plus loin).</p> <p><b>Définition I.11</b> On dit que deux sev <math>F</math> et <math>G</math> de <math>E</math> sont orthogonaux (par rapport à <math>q</math>) si <math>F \subset G^\perp</math> (équivalent à <math>G \subset F^\perp</math>).</p> <p style="text-align: right;">(27)</p>	<p><b>Cas de forme quadratique non dégénérée</b></p> <p><b>Théorème I.5</b> Si <math>q</math> est une forme quadratique non dégénérée. Alors pour tout sev <math>F</math> de <math>E</math>, on a :</p> $\dim F + \dim F^\perp = \dim E \text{ et } (F^\perp)^\perp = F.$ <p><b>Preuve:</b> Avec les notations du Théorème I.3, <math>f</math> la forme polaire de <math>q</math> :</p> $\begin{aligned} F^\perp &= \{x \in E \mid \forall y \in F : f(x, y) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in F : f(y, x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in F : \langle \Phi(y), x \rangle = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in F : x \in \ker \Phi(y)\} \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">(28)</p>
$= \bigcap_{y \in F} \ker \Phi(y)$ <p>D'autre part, soit <math>(u_1, \dots, u_p)</math> une base de <math>F</math>, <math>\Phi</math> étant bijective donc <math>(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_p))</math> est une base de <math>\Phi(F)</math> sev de <math>E^*</math>. Donc</p> $F^\perp = \bigcap_{y \in F} \ker \Phi(y) = \bigcap_{i=1}^p \ker \Phi(u_i)$ <p>et comme les <math>p</math> formes linéaires <math>\Phi(u_i)</math> sont linéairement indépendantes, on a <math>\dim \bigcap_{i=1}^p \ker \Phi(u_i) = \dim E - p</math>.</p> <p>Pour <math>(F^\perp)^\perp</math>, on sait que <math>F \subset (F^\perp)^\perp</math> et d'après ce qui précède <math>\dim (F^\perp)^\perp = \dim F</math>.</p> <p style="text-align: right;">(29)</p>	<p><b>Exercice I.1</b> Chercher une autre démonstration de la première partie du théorème.</p> <p><b>Remarque I.2</b> On n'a pas toujours <math>F \cap F^\perp</math>, pour dire que la somme est directe.</p> <p><b>Exemple :</b> <math>q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2</math>, non dégénérée sur <math>\mathbb{R}^2</math>, mais <math>(\mathbb{R}(1, 1))^\perp = \mathbb{R}(1, 1)</math>.</p> <p><b>Définition I.12</b> On dit qu'un vecteur <math>u \in E</math> est <i>isotrope</i> si <math>q(u) = 0</math>. On dit qu'un sev <math>F</math> de <math>E</math> est <i>isotrope</i> si <math>F \cap F^\perp \neq \{0\}</math>.</p> <p><b>Théorème I.6</b> Si <math>F</math> est sev non isotrope, et <math>q</math> est une forme quadratique non dégénérée alors <math>F \oplus F^\perp = E</math>.</p> <p style="text-align: right;">(30)</p>

## II Réduction des formes quadratiques (dimension finie)

### II.1 Familles et bases orthogonales

**Définition II.1** Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Une famille de vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$  est dite  $q$ -orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

**Proposition II.1** Toute famille de vecteurs non isotropes  $q$ -orthogonale est libre.

**Preuve:** facile.

(31)

**Théorème II.1** Si  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ , alors  $E$  admet au moins une base  $q$ -orthogonale. Si en plus  $q$  est non dégénérée,  $E$  possède une base  $q$ -orthonormale.

**Preuve:** récurrence sur  $\dim E$ . si  $q = 0$  terminé, si non soit  $e_n \in E$  tel que  $q(e_n) \neq 0$ , on pose  $H = \{e_n\}^\perp$   $\dim H = n - 1$  et  $q|_H$  vérifie le HR, on considère une base de  $H$   $(e_1, \dots, e_{n-1})$  qui  $q$ -orthogonale,  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  est alors une base de  $E$ .

En effet si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ , on aura  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_n\right) = 0$ , c.à.d  $\lambda_n q(e_n) = 0$  et donc  $\lambda_n = 0$  et  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$ .

(32)

### II.2 Décomposition en carrés (Algorithme de Gauss)

- Le Théorème II.1 signifie qu'il existe une base dans laquelle la matrice de  $q$  est diagonale.

**En effet:** Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base  $q$ -orthogonale, alors pour tout  $x = \sum x_i e_i$ , on a,  $q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j f(e_i, e_j)$ , et comme  $f(e_i, e_j) = 0$  pour  $i \neq j$ , on a  $q(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} q(e_i) (x_i)^2$ .

Donc  $Mat(\mathcal{B}, q) = \text{diag}(q(e_1), \dots, q(e_n))$ .

- Quitte à positionner les éventuels vecteurs isotropes de la base  $\mathcal{B}$  en dernier, la matrice de  $q$  est de la forme  $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$ , avec  $r = \text{rang}(q)$ .

(33)

Et dans ce cas

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_i)^2,$$

c'est une réduite en carrés de  $q$ .

- On peut donc énoncer le théorème :

**Théorème II.2** Soit  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ . le rang de  $q$  est  $r$  si et seulement si il existe  $r$  formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  linéairement indépendantes et  $r$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  non nuls telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (\varphi_i(x))^2$$

(34)

**Preuve:**  $\implies$ . Avec les notations ci-dessus, il suffit de prendre pour  $\varphi_i$ , la  $i^{\text{ème}}$  forme linéaire coordonnée relativement à la base  $\mathcal{B}$  et  $\lambda_i = \alpha_i$ .

$\impliedby$ . Si  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  libre dans  $E^*$ , on la complète pour avoir une base  $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $E^*$ , puis on considère sa base antéduale  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$ . La matrice de  $q$  dans cette base est  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ , et  $r = \text{rang}(q)$ .

**Corollaire II.1** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  symétrique. Il existe une matrice  $P$  inversible et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$M = {}^t P D P.$$

**Remarque II.1 (Pratique)** Pour avoir une base  $q$ -orthogonale à partir d'une réduite en carrés  $\sum_{i=1}^r \lambda_i (\varphi_i(x))^2$ , il "suffit" de

(35)

déterminer la base antéduale d'une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $E^*$  obtenue par complétion de la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ .

**Théorème II.3 (Cas complexe)** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .  $\text{rang}(q) = r$ , si et seulement si il existe  $r$  formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  linéairement indépendantes telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^r (\varphi_i(x))^2$$

**Preuve:** On fait entrer les  $\lambda_i$  à l'intérieur du carré, c'est possible car dans  $\mathbb{C}$ , il existe  $\mu_i$  tels que  $(\mu_i)^2 = \lambda_i$ .

**Corollaire II.2** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  symétrique. Il existe une

(36)

matrice  $P$  inversible telle que

$$M = {}^t P J_r P.$$

avec  $J_r = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$  et  $r = \text{rang}(M)$ . En particulier si  $M$  inversible  $M = {}^t P P$ .

**Exercice II.1** Et dans le cas réel ?!

### Description de l'algorithme de Gauss

L'algorithme de Gauss permet de déterminer de manière récurrente "une" réduite en carrés d'une forme quadratique avec des formes linéaires linéairement indépendantes.

(37)

Supposons que  $q(x)$  est donnée par son expression polynomiale dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  :

$$q\left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

- S'il existe  $i$  tel que  $a_{ii} \neq 0$ , soit  $a_{nn} \neq 0$  pour simplifier les notations. On écrit  $q(x)$  sous la forme

$$q(x) = a_{nn} (x_n)^2 + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} a_{ij} x_i x_j$$

(38)

$$\begin{aligned}
 &= a_{nn} \left( (x_n)^2 + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i \right)^2 \right) \\
 &- a_{nn} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} (x_i)^2 \\
 &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} a_{ij} x_i x_j \\
 &= a_{nn} \left( x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i \right)^2 + p(x_1, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned}$$

on pose alors  $\varphi_n(x) = \left( x_n + \sum_{1 \leq i \leq n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i \right)$ , puis on

(39)

continue avec  $p$  forme quadratique sur  $\mathbb{K}^{n-1}$ .

- Si non  $\forall i \in [1, n], a_{ii} = 0$ , il existe alors  $i < j$  tels que  $a_{ij} \neq 0$ , soit  $\neq 0$ , pour simplifier les notations. On écrit  $q(x)$  sous la forme

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2a_{n-1,n} x_{n-1} x_n + 2x_n \sum_{1 \leq i \leq n-2} a_{in} x_i \\
 &+ 2x_{n-1} \sum_{1 \leq i \leq n-2} a_{i,n-1} x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} a_{ij} x_i x_j
 \end{aligned}$$

(40)

puis

$$\begin{aligned}
 &2a_{n-1,n} \left( x_n x_{n-1} + x_n \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i + x_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i \right) \\
 &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} a_{ij} x_i x_j
 \end{aligned}$$

et en factorisant

$$\begin{aligned}
 &2a_{n-1,n} \left( x_n + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i \right) \left( x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i \right) \\
 &- \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i + 2 \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} x_i x_j
 \end{aligned}$$

(41)

$$= 2a_{n-1,n} \psi_n \psi_{n-1} + p(x_1, \dots, x_{n-2})$$

et en remarquant que

$$2\psi_n \psi_{n-1} = \frac{1}{2} \left( (\psi_n + \psi_{n-1})^2 - (\psi_n - \psi_{n-1})^2 \right)$$

on a

$$\begin{aligned}
 q(x) &= \frac{a_{n-1,n}}{2} (\varphi_n(x))^2 - \frac{a_{n-1,n}}{2} (\varphi_{n-1}(x))^2 \\
 &+ p(x_1, \dots, x_{n-2})
 \end{aligned}$$

- On vérifie sans trop de peine que les formes linéaires issues de l'algorithme de Gauss sont linéairement indépendantes.

(42)

**Exemple II.1**  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ .

**Réponse:**

$$\begin{aligned}
 x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 &= x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 \\
 &= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 \\
 &= (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2
 \end{aligned}$$

alors  $\varphi_1(x) = x_1 + x_2, \varphi_2(x) = x_2 + 2x_3, \varphi_3(x) = x_3$ .

**Exercice II.2** Chercher la base antéduale de  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ .

(43)

### II.3 Formes quadratiques réelles

On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$ , pratiquement  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Formes positives, négatives**

**Définition II.2** On dit qu'une forme quadratique sur  $E$  est positive si  $q(x) \geq 0, \forall x \in E$ .

De même  $q$  est négative si  $q(x) \leq 0, \forall x \in E$ .

**Théorème II.4** Si  $q$  est une forme quadratique positive sur  $E$ . Alors  $\text{rang}(q) = r$  si et seulement si il existe  $r$  formes linéaires

(44)

$\varphi_1, \dots, \varphi_r$  linéairement indépendantes telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^r (\varphi_i(x))^2$$

En particulier toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  symétrique telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^t X M X \geq 0$$

est congruente à  $I_n$ , c.à.d, s'écrit sous la forme  ${}^t P P$  avec  $P$  inversible.

**Définition II.3** On dit qu'une forme quadratique réelle  $q$  est définie positive si  $\forall x \in E \setminus \{0\} : q(x) > 0$ , i.e.

$$\forall x \in E : q(x) \geq 0 \text{ et } q(x) = 0 \iff x = 0$$

(45)

**Théorème II.5** Soit  $q$  forme quadratique positive (ou négative) de forme polaire  $f$ . Alors  $\forall x, y \in E :$

$$(f(x, y))^2 \leq q(x)q(y) \text{ (inégalité de Schwarz)}$$

**Preuve:** Classique. on calcule  $q(x + ty)$ , avec  $x, y \in E$  et  $t \in \mathbb{R}$ . C'est un polynôme de degré 2 en  $t$ , qui garde un signe constant ...

**Théorème II.6** Soit  $q$  une forme quadratique positive (ou négative) sur un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$  de dimension finie.  $q$  est non dégénérée si et seulement si elle est définie positive (ou définie négative).

(46)

- En général si  $q$  est **positive** (ou négative), alors

$$E^\perp = \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

**Preuve:**  $\implies$ . Supposons que  $q$  est non dégénérée, et soit  $x \in E$ , tel que  $q(x) = 0$  alors  $\forall y \in E, (f(x, y))^2 \leq 0$ , donc  $\forall y \in E, f(x, y) = 0$ . Et par conséquent  $x = 0$ .

$\impliedby$ . Supposons que  $q$  est définie positive, et soit  $x \in E$ , tel que  $\forall y \in E, f(x, y) = 0$ , alors  $q(x) = f(x, x) = 0$ , donc  $x = 0$ .

(47)

### Signature

- On a déjà vu qu'une forme quadratique  $\Phi$  sur  $\mathbb{R} - ev$  admet une réduite en carrés de la forme  $\sum_{i=1}^r \lambda_i (\varphi_i(x))^2$ .

Quitte à faire entrer les  $|\lambda_i|$  avec les  $\varphi_i$ , on peut écrire

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^p (\varphi_i(x))^2 - \sum_{i=1}^q (\psi_i(x))^2 \text{ avec } r = p + q.$$

Ce qui signifie qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q, \dots)$   $\Phi - orthogonale$  dans laquelle la matrice de  $\Phi$  est

$$\begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_q & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$$

(48)

**Théorème II.7 (Théorème d'inertie de Sylvester)** Avec les notations ci-dessus le couple  $(p, q)$  d'entiers ne dépend que de la forme quadratique et non de la base  $\Phi - orthogonale$  choisie.

**Preuve:** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base  $\Phi - orthogonale$  de  $E$ .

On suppose que  $\Phi(e_k) > 0$ , pour tout  $k \in [1, p]$  et  $\Phi(e_k) \leq 0$ , pour tout  $k > p$ , alors  $\Phi|_{\text{vect}(e_1, \dots, e_p)}$  est définie positive.

D'autre part,  $\forall x \in \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \Phi(x) \leq 0$ .

Donc si  $F$  est un sev de  $E$  sur lequel  $\Phi$  est définie positive, on a  $F \cap \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = \{0\}$  et par conséquent  $\dim F \leq p$ .

On conclut donc que  $p$  est la dimension maximale d'un sev sur lequel  $\Phi$  est définie positive.

(49)

**Définition II.4** Le couple d'entiers  $(p, q)$ , tels que

$$p = \text{card} \{k \in [1, n] \mid \Phi(e_k) > 0\} \text{ et}$$

$$q = \text{card} \{k \in [1, n] \mid \Phi(e_k) < 0\}$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base  $\Phi - orthogonale$  de  $E$ , est appelé la **signature de la forme quadratique**  $\Phi$ .

On a alors  $\text{rang}(\Phi) = p + q$ .

**Exemple II.2**  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ .

**Réponse:** On a déjà montré que

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2$$

donc la signature de  $q$  est  $(2, 1)$ .

(50)