Séries dans un evn

B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda

Table des matières

I Extention de la notion de série (Famille sommable) 5
I.1 Commutative convergence 5
I.2 Famille dénombrable absolument sommable . 9
I.3 Sommation par paquets 15
I.4 Cas $I = \mathbb{N}^2$: Suites doubles 23

II Série dans une algèbre normée 30
II.1 Définitions – Exemples 30
II.2 Série exponentielle 40

Vocabulaire

Les définitions d'une série, de sa convergence, de la somme, du reste, sont comme dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les propriétés de linéarité subsistent.

- Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série est notée $\sum u_n$ et S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge Sa limite S est alors appelée la somme de la série et est

①

notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On introduit aussi $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ appelé reste de rang n de la série.

- La *Condition de Cauchy* pour la série $\sum u_n$ est celle des suites de ses sommes partielles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$
$$\forall n \geq p \geq N : \left\| \sum_{k=p}^{n} u_k \right\| \leq \varepsilon$$

②

Série absolument convergente

Définition .1 Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dit absolument convergente si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème .1 Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente d'éléments d'un espace de **Banach** alors elle est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Preuve: On montre que la suite (S_n) est de Cauchy.

③

Exercice .1 Montrer que si dans un evn E toute série absolument convergente est convergente alors E est un Banach.

Remarque .1 Si $\dim E$ finie, E est complet donc les séries absolument convergentes sont convergentes.

Définition .2 Une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Par exemple la série harmonique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (et pas mal de séries vérifiant le critère d'Abel) sont semi-convergente.

④

I Extention de la notion de série (Famille sommable)

I.1 Commutative convergence

Définition I.1 Soit $\sum u_n$ une série dans un Banach. On dit que $\sum u_n$ est **commutativement convergente** si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente de même somme que $\sum u_n$. Celà signifie que la série est convergente vers une même somme même si on permute l'ordre des termes dans la somme.

⑤

Théorème I.1 Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente dans un Banach E, alors elle est commutativement convergente.

Preuve: D'abord pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \| u_{\sigma(n)} \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| .$$

D'autre part si on pose

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et } \ell_\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

⑥

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\ell_\sigma - \ell\| \leq \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right\| + \left\|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell_\sigma\right\| + \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right\|$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right\| + \left\|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell_\sigma\right\| \leq \varepsilon$$

⑦

et puisque la série $\sum \|u_n\|$ vérifie le critère de Cauchy, il existe $N' \geq N$ tel que $\forall n \geq p \geq N'$:

$$\sum_{k=p}^{n} \|u_k\| \leq \varepsilon$$

on considère alors $N'' = \max \sigma^{-1}([0, N']) \geq N'$ de sorte que $[0, N'] \subset \sigma([0, N''])$. On a donc $\forall n \geq N''$

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=N'+1}^{\max \sigma([0,n])} \|u_k\| \leq \varepsilon$$

on conclut donc que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|\ell_\sigma - \ell\| \leq 2\varepsilon$$

⑧

et par conséquent $\ell_\sigma = \ell$.

I.2 Famille dénombrable absolument sommable

On considère une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un Banach E, I un ensemble dénombrable (dans la pratique $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{Z}$). Soit

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I \text{ bijective}$$

La sommabilité de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une généralisation de la convergence commutative des séries.

Définition I.2 On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est absolument sommable si la série $\sum_{n \geq 0} \|u_{\sigma(n)}\|$ est convergente. Ceci étant

⑨

alors indépendant de la bijection σ.

Proposition I.1 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Théorème I.2 (et définition) Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **absolument sommable** alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente. La somme $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ étant indépendante de σ.

On pose alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \ell$$

⑩

et on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable de somme ℓ.

Preuve: C'est la convergence commutative ...

Théorème I.3 Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un Banach E est **absolument sommable** si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall K \subset I \ (K \text{ fini}), \ \sum_{k \in K} |u_k| \leq M,$$

et dans ce cas la somme ℓ de la famille est **caractérisée** par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J \subset I \ (J \text{ fini}), \text{ tel que } \forall K \subset I \ (K \text{ fini}), \quad (*)$$

$$J \subset K \Longrightarrow \left|\sum_{k \in K} u_k - \ell\right| \leq \varepsilon$$

⑪

Preuve: La première partie du théorème traduit le fait que les somme "partielles" sont bornées qui est une caractérisations de la sommabilté pour une famille à terme positif.

Pour la deuxième partie, considérons une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$, puis la convergence (absolue) de la série $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ et le fait que la série $\sum_{n \geq 0} |u_{\sigma(n)}|$ vérifie le critère de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : \left|\sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} - \ell\right| \leq \varepsilon \text{ et } \sum_{i=N+1}^{n} |u_{\sigma(i)}| \leq \varepsilon$$

on pose alors $J = \sigma([0, N])$, pour tout K tel que $J \subset K$ (K

⑫

fini), $n = \max \sigma^{-1}(K) \geq N$ et

$$\left|\sum_{k \in K} u_k - \ell\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n} u_{\sigma(i)} - \ell\right| + \sum_{i=N+1}^{n} |u_{\sigma(i)}| \leq 2\varepsilon.$$

Pour la réciproque, la preuve est en tout semblable à l'unicité de la limite. Si $\ell \neq \ell'$ vérifient tous les deux (*) alors avec $\varepsilon = |\ell' - \ell|/4$, il existe J et J' finies inclus dans I, vérifiant l'implication dans (*). Donc avec $K = J \cup J'$, on a

$$|\ell' - \ell| \leq \left|\sum_{k \in K} u_k - \ell'\right| + \left|\sum_{k \in K} u_k - \ell\right| \leq |\ell' - \ell|/2$$

ce qui absurde.

⑬

Proposition I.2 (Inégalité triangulaire) Si une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un Banach E est **absolument sommable** alors

$$\left\|\sum_{i \in I} u_i\right\| \leq \sum_{i \in I} \|u_i\|$$

Pour donner un peu plus que les définitions, donnons les propositions :

Proposition I.3 L'ensemble des familles indexées par I, absolument sommables, à éléments dans un Banach, est un $\mathbb{K} - ev$ pour les opérations usuelles. L'application

$$N_1 : (u_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} \|u_i\|$$

⑭

est une norme qui en fait un Banach.

Preuve: Le fait que l'espace est complet mérite une démonstration, chercher la.

Proposition I.4 Toute sous famille d'une famille sommable est sommable.

Preuve: facile, la faire en exercice.

I.3 Sommation par paquets

D'abord rappelons la sommation par **groupement de termes**.

15

- Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $p \longmapsto n_p$ strictement croissante, on associe la suite (v_p) définie par

$$v_0 = \sum_{k=0}^{n_0} u_k, \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^* : v_p = \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} u_k$$

de sorte que

$$v_0 = u_0 + ... + u_{n_0};\ v_1 = u_{n_0+1} + ... + u_{n_1}, ...$$

les sommes partielles de la série $\left(\sum v_p\right)$ forment alors une sous suite de celle des sommes partielles de $\sum u_n$. Donc,

16

Proposition I.5 Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi et les deux séries ont la même somme.

Remarque I.1 Si $\sum v_n$ converge pour un certain φ, on ne peut rien dire sur $\sum u_n$.

Exemple : $u_n = (-1)^n$, avec $\varphi(n) = 2n$, on a $v_n = 0$ pour tout n, mais $\sum u_n$ diverge.

Exercice I.1 Montrer que si $\lim u_n = 0$ et $\exists M \in \mathbb{N} \mid \forall n : \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M$, on a la réciproque : $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

17

Théorème I.4 Si $\sum u_n$ est à termes positifs et si $\sum v_n$ converge pour un certain $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, alors $\sum u_n$ converge et a donc la même somme que $\sum v_n$.

Preuve: Notons $V_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq V_n \leq \sum_{p=0}^{+\infty} v_p$$

les sommes partielles de $\sum u_n$ sont alors bornées.

Théorème I.5 (Sommation par paquets) Si $(u_i)_{i\in I}$ est abso-

18

lument sommable de somme s, alors pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de I, on a :

(1) Pour tout $k \in K$, la famille $(u_i)_{i\in I_k}$ est absolument sommable de somme s_k.

(2) La famille $(s_k)_{k\in K}$ est absolument sommable de somme s, i.e :

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Preuve: dans le cas $I = \mathbb{N}$ et K fini. C'est à dire $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ une partition de $\mathbb{N}$, avec pour tout k, $I_k = \varphi_k(\mathbb{N})$, φ_k srictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

19

La convergence des séries $\sum_n u_{\varphi_k(n)}$ étant absolue donc la série somme $\sum_n \left(\sum_{k=1}^{p} u_{\varphi_k(n)}\right)$ est absolument convergente de somme $\sum_{k=1}^{p} s_k$.

D'autre part pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} u_n - s\right\| \leq \varepsilon \text{ et } \forall q > N : \sum_{n=N+1}^{q} \|u_n\| \leq \varepsilon$$

20

on considère $N' \in \mathbb{N}$ tel que $[0, N] \subset \bigcup_{k=1}^{p} \varphi_k[0, N']$ et pour tout $k \in [1, p]$

$$\left\|\sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi_k(n)} - s_k\right\| \leq \varepsilon$$

par conséquent

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} s_k - s\right\| \leq \sum_{k=1}^{p}\left\|\sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi_k(n)} - s_k\right\| + \left\|\sum_{n=0}^{N'} u_{\varphi_k(n)} - \sum_{n=0}^{N} u_n\right\|$$

$$+\left\|\sum_{n=0}^{N} u_n - s\right\| \leq (p+2)\varepsilon$$

21

l'entier p étant constant et $\varepsilon > 0$ quelconque, donc $\sum_{k=1}^{p} s_k = s$.

En fait on a aussi la réciproque dans le théorème.

Remarque I.2 Pour étudier la sommabilité d'une famille, on commence par montrer son absolue sommabilité puis choisir des paquets convenables permettant de calculer la somme.

- Un cas important est celui où $I = \mathbb{Z}$:

Théorème I.6 (cas $I = \mathbb{Z}$) Une famille $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à élément dans un Banach est absolument sommable si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ sont absolument convergente.

22

Dans ce cas :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

I.4 Cas $I = \mathbb{N}^2$: Suites doubles

Dans ce cas, en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- $I_k = \{k\} \cup \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \cup \{k\}$, on a le théorème

Théorème I.7 (Fubini) Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ **une suite double** à éléments dans un Banach. Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable alors

23

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente de somme a_n.

(2) la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente. Et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right).$$

- oubien avec $I_k = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = k\right\}$:

Théorème I.8 Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable

24

alors la série de terme général

$$\sum_{p+q=n} \|u_{p,q}\|$$

est convergente, et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} u_{p,q}.$$

- Ou enfin, avec $I_0 = \{(0,0)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $I_k = [0,k]^2 \setminus [0,k-1]^2$:

Théorème I.9 Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable

25

alors

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q}.$$

Exemple I.1 (Sur la fonction zeta de Riemann) Soit

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ pour } x > 1.$$

La famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n,p\geq 2}$ est absolument sommable car, pour tout

26

N et $P \geq 2$

$$\sum_{(n,p)\in[2,N]\times[2,P]} \frac{1}{n^p} = \sum_{n\in[2,N]}\left(\sum_{p\in[2,P]} \frac{1}{n^p}\right) \leq \sum_{n\in[2,N]}\left(\frac{1}{1-1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

et pour $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{1-1/n} - 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ (à termes positifs) converge.

27

Pour le calcul de la somme, on utilise Fubini

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$$

28

d'autre part

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1)$$

On déduit enfin que

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = 1.$$

29

II Série dans une algèbre normée

II.1 Définitions – Exemples

Définition II.1 Une algèbre normée unitaire $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, unitaire, munie d'une norme **multiplicative**, c'est à dire que c'est aussi un evn avec une norme qui vérifie

$$\forall u, v \in \mathcal{A} : \|uv\| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Exemples

(1) $\mathcal{L}_c(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont est algèbre normée pour toute norme subordonnée à une norme vectorielle.

30

(2) $\mathcal{B}(A;\mathbb{C})$ est l'ensemble des applications bornées de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. C'est une algèbre normée unitaire pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathcal{A}} |f(t)|$$

Exercice II.1 (1) Soit e l'élément unité d'une telle algèbre normée. Montrer que $\|e\| \geq 1$.

(2) Pour tout élément inversible $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u\| \left\|u^{-1}\right\| \geq 1.$$

Remarque II.1 Parfois on ajoute la condition $\|e\| = 1$ pour définir une algèbre normée.

31

Produit de Cauchy

Proposition II.1 Si E est une algèbre de Banach et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série produit (de Cauchy) $\sum w_n$ ($w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k$) est absolument convergent et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Preuve: La faire en exercice (Voir cours MPSI).

32

Série géométrique

Théorème II.1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ vérifiant $\|a\| < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est absolument convergente, $1_{\mathcal{A}} - a$ est inversible et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (1_{\mathcal{A}} - a)^{-1}$$

Dans le cas particulier $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, E un evn, les séries $\sum T^n$, $T \in \mathcal{L}(E)$, sont dites de **Neumann**.

Théorème II.2 Le groupe des inversibles de l'algèbe $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ est un ouvert et l'application $a \longmapsto a^{-1}$ est continue sur $\mathcal{U}(\mathcal{A})$.

33

Preuve: C'est une conséquence du théorème précédent. Si $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, pour tout $v \in \mathcal{A}$ tel que

$$\|u - v\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$$

on a

$$\left\|1 - u^{-1}v\right\| = \left\|u^{-1}(u - v)\right\| \leq \left\|u^{-1}\right\| \|u - v\| < 1.$$

Donc

$$1 - \left(1 - u^{-1}v\right) = u^{-1}v \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$$

et par conséquent $v = uu^{-1}v \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Donc

$$B\left(u, \frac{1}{\|u^{-1}\|}\right) \subset \mathcal{U}(\mathcal{A}).$$

34

Montrons que l'application $a \longmapsto a^{-1}$ est continue sur $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. D'abord en 1, soit $r \in]0,1[$ tel que la boule $\mathcal{B}(1,r)$ soit incluse dans $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Pour tout $h \in \mathcal{B}(1,r)$:

$$h^{-1} = (1 - (1 - h))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - h)^n$$

donc

$$\left\|h^{-1} - 1\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - h)^n\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|1 - h\|^n$$

et par conséquent

$$\left\|h^{-1} - 1\right\| \leq \|h - 1\| \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

35

et en général, pour tout $a \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ et pour tout $h \in \mathcal{B}\left(0, r/\left\|a^{-1}\right\|\right)$ de sorte que $1 + a^{-1}h \in \mathcal{B}(1,r)$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|(a+h)^{-1} - a^{-1}\right\| &= \left\|\left(\left(1 + a^{-1}h\right)^{-1} - 1\right) a^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|\left(1 + a^{-1}h\right)^{-1} - 1\right\| \left\|a^{-1}\right\| \\ &\leq \|h\| \left\|a^{-1}\right\|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\end{aligned}$$

l'application $a \longmapsto a^{-1}$ est localement lipschitzienne et donc continue sur $\mathcal{U}(\mathcal{A})$.

36

Application à la localisation du spectre d'une matrice

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une **norme matricielle** quelconque, c.à.d une norme qui vérifie

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \|MN\| \leq \|M\| \|N\| .$$

Toutes les normes subordonnées sont matricielles.

D'après le théorème **II.1**, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $I_n - M$ est inversible est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} M^k = (I_n - M)^{-1} .$$

Seulement il est clair que pour toute matrice nilpotente N, la série de Neumann $\sum N^k$ converge et $I_n - N$ est inversible.

37

Donc la condition $\|M\| < 1$ n'est pas nécessaire à la convergence de la série. Par contre

Proposition II.2 Si $I_n - M$ n'est pas inversible pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|M\| \geq 1$.

Définition II.2 On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble

$$\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I_n - M \notin GL_n(\mathbb{K})\}$$

c'est l'ensemble des valeurs propres de M.

Théorème II.3 Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M)} |\lambda| \leq \|M\|$$

38

$c.\grave{a}.d$ que $\mathrm{Sp}(M)$ est inclus dans la boule fermée de centre 0 est de rayon $\|M\|$ pour toute norme matricielle.

En effet: Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de M, alors $I_n - \frac{1}{\lambda}M$ n'est pas inversible. Donc

$$\left\|\frac{1}{\lambda}M\right\| \geq 1$$

et donc

$$|\lambda| \leq \|M\|.$$

39

II.2 Série exponentielle

Théorème II.4 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout a élément de $\mathcal{A}$ la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge (absolument).

Sa somme est par définition l'exponentielle de a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Preuve: Pour tout $a \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|a\|^n}{n!}$ est convergente de somme $e^{\|a\|}$ d'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|a^n\| \leq \|a\|^n \text{ (récurrence facile)}$$

40

donc par comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente.

Proposition II.3 Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $ab = ba$, on a

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b$$

Preuve: Utiliser le produit de Cauchy...

41

Exponnetielle de matrices

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Par exemple :

$$\exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n$$

et pour toute matrice diagonale

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

42

Les propriétés suivantes sont immédiates :

- $\exp(M)$ commute avec tout polynôme en M.
- $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $MN = NM$:

$$\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$$

- $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P^{-1}\exp(M)P = \exp(P^{-1}MP)$$

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le calcul de $\exp(A)$, passe par la réduction de la matrice A et la formule

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_r \end{pmatrix}$$

43

dans le cas de matrices triangulaires (par blocs), les A_i étant des blocs carrés.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(\exp A) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$, avec en plus, pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$$

ce qui permet d'avoir :

$$\det[\exp(A)] = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$$

44